Andragradsekvationer

Tid: 70 minuter

Hjälpmedel: Formelblad

1.

Alla andragradsekvationer kan skrivas på formen $x^2 + px + q = 0$
Vilket värde har q i ekvationen $x^2 = 3x - 7$?

(1/0/0)

Bedömningsanvisningar

+1 $\mathbf{E_B}$ Korrekt svar. ($q = 7$)

Förklaring

I $x^2 + px + q = 0$ motsvarar q konstanttermen och termen befinner sig i samma led som andragradstermen. För att underlätta när vi ska ta reda på värdet på q skriver vi därför om ekvationen i formen för PQ.

$$x^2 = 3x - 7 \qquad \textit{Subtrahera båda leden med } 3x$$
$$x^2 - 3x = -7 \qquad \textit{Addera båda leden med } 7$$
$$x^2 - 3x + 7 = 0$$

Ekvationen kan nu lätta jämföras med $x^2 + px + q = 0$ och vi ser att konstanttermen $q = 7$

2. Vilket alternativ anger den fullständiga lösningen till ekvationen $x^2 = 36$?

(1/0/0)

Bedömningsanvisningar

+1 $\mathbf{E_B}$ Korrekt svar. ($x = \pm 6$)

Förklaring

Ekvationen saknar en förstagradsterm och en konstantterm vilket gör att det effektivast löses med kvadratrotsmetoden.

$x^2 = 36$ *Dra roten ur på båda leden*

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{36}$

$x = \pm 6$

Vi får att $x_1 = 6$ och $x_2 = -6$ är lösningar till ekvationen, då både $6^2 = 36$ och $(-6)^2 = 36$.

3. Vilken metod är effektivast då du ska lösa ekvationen $4x^2 - 40x = -4$

(1/0/0)

Bedömningsanvisningar

+1 $\mathbf{E_B}$ Korrekt svar (PQ-formeln)

Förklaring

Då ekvationen innehåller en andragradsterm $4x^2$, en förstagradsterm $-40x$ och en konstantterm -4 så använder vi PQ-formeln, efter att vi samlat alla termer i ena ledet.

4. Din vän ska lösa andragradsekvationen $3x^2 = 30x - 90$
Efter en stund frågar din vän om du kan kolla på uppställningen och se om den är rätt. Så här ser den ut.

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 + 30}$$

Vad är ditt svar?

(2/0/0)

Bedömningsanvisningar

+1 E_{PL} Eleven påtalar att det ska vara subtraktion mellan termerna under rottecknet i stället.

+1 E_K Eleven motiverar sitt svar med godtagbart resonemang.

Förklaring

Vi skriver om ekvationen för att lättare kunna se felet.

$3x^2 = 30x - 90$ *Subtrahera båda leden med* $-30x$
$3x^2 - 30x = -90$ *Addera båda leden med* 90
$3x^2 - 30x + 90 = 0$ *Dividera båda leden med* 3
$x^2 - 10x + 30 = 0$

Vi sätter in i PQ

$$x_{1,2} = -\frac{(-10)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-10)}{2}\right)^2 - 30}$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 30}$$

Vi ser här att din vän har missat att subtrahera konstanten 30 under rottecknet. Kanske din vän inte observerade att konstant termen inte var i samma led som andragradstermen.

5. Vilken av följande ekvationer saknar en reell lösning?

(1/0/0)

Bedömningsanvisningar

+1 $\mathbf{E_B}$ Korrekt svar. ($x^2 + 9 = 0$)

Förklaring

Samtliga ekvationer är andragradsekvationer. Ett vanligt fall när vi får ickereella rötter är när vi drar roten ut ett negativt tal, eftersom att att det bland de reella talen inte finns något tal som gånger sig själv blir negativt.'

I uppgifter är det endast ekvationen $x^2 + 9 = 0$ som saknar en reell lösning då vi får att $x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$ vilket är en imagenär lösning till ekvationen.

6. Bestäm koefficienten framför andragradstermen i ekvationen $4x^2 - 2x + 3^2 = 0$.
Motivera ditt svar.

(2/0/0)

Bedömningsanvisningar

+1 $\mathbf{E_B}$ Korrekt svar (4)

+1 $\mathbf{E_R}$ Med en korrekt matematisk motivering som motsvarar betygsnivå E.

Förklaring

En koefficient är siffran framför variabeln. Andragradstermen är den variabelterm som har gradtalet två, alltså variabeln med exponenten 2. I detta fall är de en fyra som står framför variabeln med exponenten två.

Det finns en term till som har exponenten två, men det är ingen variabel utan siffran tre. $3^2 = 9$ vilket är en konstant, då termen inte innehåller någon variabel.

Känner du dig osäker på vad de olika orden betyder så kan du lära dig dem i mitten av videon Vad är algebra?

7. Faktorisera uttrycket $2x^2 - 8x + 8$ så långt som möjligt.

(0/1/0)

Bedömningsanvisningar

+1 $\mathbf{C_P}$ Korrekt svar. (ex. $2(x-2)^2, 2\,(x-2)\,(x-2)$)

8. Ange lösningarna till ekvationen $\sqrt{-5+6x}-x=0$

(0/2/0)

Bedömningsanvisningar

+1 C_P Godtagbar ansats tex. flyttar över x och kvadrerar båda leden.

+1 C_R Eleven värderar rötterna och anger falsk rot ($x=-1$)samt sann rot ($x=5$)

Förklaring

Vi löser ekvationen genom kvadrering efter att vi skrivit om den lite. Då måste vi alltid vara observanta på att falska rötter kan uppkomma, vilket vi därför måste verifiera i slutet av uppgiften.

$\sqrt{-5+6x}-x=0$ *Addera båda leden med x*

$\sqrt{-5+6x}=x$ *Kvadrera båda leden*

$-5+6x=x^2$ Addera *båda leden med med* 5

$6x=x^2+5$ *Subtrahera båda leden med med* $6x$

$x^2-6x+5=0$

Vi fortsätter lösningen med PQ

$$x=-\frac{-6}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2-5}=3\pm\sqrt{9-5}=3\pm2$$

vilket ger rötterna $x_1=-1$ och $x_2=5$

Vi kontrollerar att rötterna är sanna genom att se om de uppfyller likheten $\sqrt{-5+6x}-x=0$.

$x_1=-1$ ger att $VL=\sqrt{-5+6\cdot(-1)}-(-1)=\sqrt{-5-6}+1=\sqrt{-11}+1$ och $HL=0$ Då $VL\neq HL$ är detta en falsk rot.

$x_2=5$ ger att
$VL=\sqrt{-5+6\cdot(5)}-5=\sqrt{-5+30}-5=\sqrt{25}-5=5-5=0$ och $HL=0$
Då $VL=HL$ är $x=5$ en lösning till ekvationen.

9. Bestäm a så att andragradsekvationen $(5-x)\left(ax+\frac{1}{10}\right)=0$ har en lösning $x=\frac{2}{5}$.
Motivera ditt svar.

(0/2/0)

Bedömningsanvisningar

+1 C_P Anger ett korrekt värde på a. (ex. $x=-\frac{1}{4}$, $x=-0,25$)

+1 C_K Lösningen kommuniceras på en nivå som motsvarar kunskapskraven för C

Förklaring

Om $(5-x)\left(ax+\frac{1}{10}\right)=0$ ska ha en lösning för $x=\frac{2}{5}$, ser vi att $\left(ax+\frac{1}{10}\right)=0$ då den första parentesen inte kan anta värdet noll då $x=\frac{2}{5}$

Vi bestämmer a genom att sätta in $x=\frac{2}{5}$ i den andra parentesen.

$\left(a\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\right)=0$ *Subtrahera båda leden med* $\frac{1}{10}$

$a\cdot\frac{2}{5}=-\frac{1}{10}$ *Dividera båda leden med* $\frac{2}{5}$

$a=-\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}$

Vi får då att

$$a=-\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}=-\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{2}=-\frac{5}{20}=-\frac{1}{4}$$

Då $a=-\frac{1}{4}$ får vi att en lösningn till andragradsekvationen $(5-x)\left(ax+\frac{1}{10}\right)=0$ är då $x=\frac{2}{5}$

10. Vilket värde ska p ha för att ekvationen $x^2 + px + q = 0$ skall få endast en lösning? Motivera ditt svar.

(0/2/1)

Bedömningsanvisningar

+1 C_{PL} Korrekt ansats tex anger att p ska anta ett värde så att differensen under rottecknet antar värdet noll.

+1 C_M Bestämmer $p = 2\sqrt{q}$ eller $p = -2\sqrt{q}$

+1 A_K Bestämer båda värdena på p, samt kommunicerar lösningen på betygsnivån A, genom att använda korrekta matematiska begrepp och tecken.

Förklaring

Om ekvationen endast skall ha en lösning innebär det att $x_1 = x_2$, alltså en dubbelrot, vilket vi får då "rot-delen" i PQ-formeln är lika med noll, dvs att $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0$

Vi bestämmer värdet på p som uppfyller detta.

$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0$ *Kvadrera båda leden*

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ *Addera båda leden med* q

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$ *Dra roten ur båda leden*

$\frac{p}{2} = \pm\sqrt{q}$ *Multiplicera båda leden med* 2

$p = \pm 2\sqrt{q}$

Då $p_1 = 2\sqrt{q}$ eller $p_2 = -2\sqrt{q}$ så kommer ekvationen bara få en lösning.

11. Bestäm värdet för c så att ekvationen $x^2 + 4x + c = 0$ får komplexa rötter. (0/1/2)

Bedömningsanvisningar

+1 C_B Eleven komunicerar att komplexa rötter fås då man drar roten ur ett negativ tal.

+1 A_P Korrekt svar ($c > 4$)

+1 A_K där eleven komunicerar svaret på en nivå som motsvarar kunskapskraven för A.

Förklaring

En ekvation får komplexa rötter då vi drar roten ut ett negativt tal. Detta är en andragradsfunktion vilken kan lösas med PQ-formeln. Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ i PQ-formen får vi komplexa rötter, eftersom att vi då får ett negativt tal under rottecknet.

I vår uppgift är $p = 4$ och $q = c$ och vi ska bestämma värdet för c som gör att

$\left(\frac{4}{2}\right)^2 - c < 0$ *Addera båda leden med* c

$\left(\frac{4}{2}\right)^2 < c$ *Beräkna VL*

$4 < c$ *Skriv om så att variabeln hamnar i VL*

$c > 4$

Då c är större än fyra kommer ekvationen får komplexa rötter.

12.

Din vän tänker på tre positiva heltal i rad, alltså till exempel $4, 5, 6$ eller $17, 18, 19$.
Produkten av de tre talen är fem gånger så stor som deras summa.
Vilka är de tre talen din vän tänker på?

(0/0/3)

Bedömningsanvisningar

+1 A_P Eleven löser ekvationen coh anger dess tre lösningar ($x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -4$)

+1 A_M Eleven ställer upp en korrekt ekvation för sambandet mellan produkten och summan. ex ($(x-1)x(x+1) = 5(x-1+x-x+1)$)

+1 A_R Eleven motivera korrekt svar ($3, 4$ och 5) genom komunikation som motsvarar kunskapkraven på nivå A.

Förklaring

Om vi bestämmer det första talet till $x-1$ så kommer nästa tal vara x och nästa $x+1$.
Om produkten av dessa är fem gånger större än summan av dem får vi ekvationen att

$$(x-1)\cdot x\cdot(x+1) = 5\left((x-1)+x+(x+1)\right)$$

eftersom att en summa är när man adderar talen och en produkt när man multiplicerar dem.

Vi skriver om och förenklar ekvationen för att beräkna värdet på x som uppfyller likheten.

$$\begin{aligned}
&(x-1)\cdot x\cdot(x+1) = 5\left((x-1)+x+(x+1)\right) \\
&x\cdot(x-1)\cdot(x+1) = 5(x-1+x+x+1) && \textit{Konjugatregeln i VL} \\
&x\cdot\left(x^2-1^2\right) = 5(3x) && \textit{Multiplicerar in i båda leden} \\
&x^3 - x = 15x && \textit{Subtrahera båda elden med } 15x \\
&x^3 - 16x = 0 && \textit{Bryt ut x i VL} \\
&x\left(x^2-16\right) = 0
\end{aligned}$$

Enligt nollproduktsmetoden är ekvationens lösningar

$x_1 = 0$, $x_2 = 4$ och $x_3 = -4$

Då lösningarna x_1 och x_3 ger att dem sökta talföljden inte innehåller endast positiva tal måste $x = 4$ vara vårt x-värde.

Vi får då att de tre talen som vi din vän tänkte på är $3, 4$ och 5 eftersom att

första talet var $x - 1 \Rightarrow 4 - 1 = 3$
andra talet var $x \Rightarrow 4$
tredje talet var $x + 1 \Rightarrow 4 + 1 = 5$