Part B	Problems 1-13 which only require answers.
Part C	Problems 14-21 which require complete solutions.
Test time	150 minutes for Part B and Part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 59 points consisting of 21 E-, 22 C- and 16 A-points.

Level requirements for test grades
E: 15 points
D: 23 points of which 7 points on at least C-level
C: 30 points of which 12 points on at least C-level
B: 39 points of which 5 points on A-level
A: 47 points of which 9 points on A-level

The number of points you can have for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge level(s) (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A- point.

For problems labelled "*Only answer is required*" you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: ____

Date of birth: ____

Educational programme: _________________________________

Part B: Digital resources are not allowed. *Only answer is required*. Write your answers in the test booklet.

1. Differentiate

a) $f(x) = \sin 2x$ ______________________ (1/0/0)

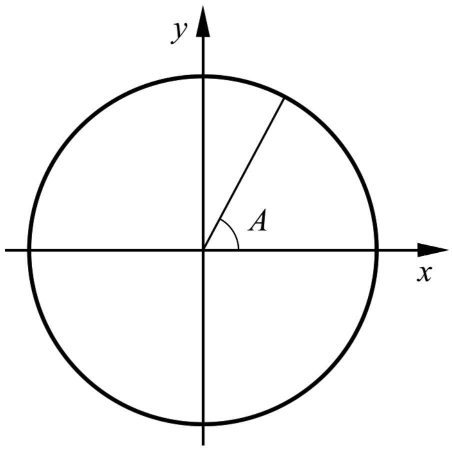
b) $f(x) = x \cdot e^x$ ______________________ (1/0/0)

2. The function f is defined by $f(z) = 2z - z^2$, where z is a complex variable.

a) Find $f(i)$ ______________________ (1/0/0)

b) Find z so that $f(z) = 10$ ______________________ (1/0/0)

3. In the unit circle below, the angle A is marked where $A = 70°$



Find two other angles, v_1 and v_2, in the interval $0° \le v \le 720°$ which have the same cosine value as angle A.

$v_1 =$ ______________________

$v_2 =$ ______________________ (2/0/0)

4. Find

a) $\bar{z}_1$ if $z_1 = -2 - 3i$ ______________________ (1/0/0)

b) a complex number z_2 so that $\operatorname{Re} z_2 = 3$ and $|z_2| > 4$

______________________ (0/1/0)

5. Write down the smallest possible value the function

$g(x) = 3 + |x-1|$ can assume.

______________________ (1/0/0)

6. Which of the alternatives A-F is equal to $\cos 25°$?

A. $1 - \sin^2 25°$ B. $\dfrac{\sin 25°}{\tan 25°}$ C. $\dfrac{\cos 75°}{3}$

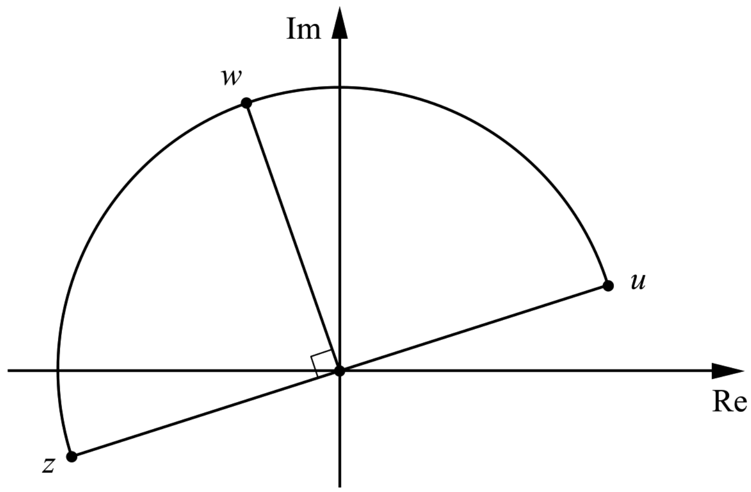
D. $\cos 75° - \cos 50°$ E. $\dfrac{\sin 50°}{2\cos 25°}$ F. $\dfrac{\tan 25°}{\sin 25°}$

______________________ (0/1/0)

7. How many solutions are there to the equation $\tan 2v = 0.7$ within the interval $0° \le v \le 360°$

______________________ (0/1/0)

8. In the figure below, three complex numbers z , u and w are marked on a semi-circle.



Which two of the alternatives A-F describe the number u ?

A. $\mathrm{i}z$ B. $\mathrm{i}^2 z$ C. $\dfrac{z}{\mathrm{i}}$

D. $\mathrm{i}w$ E. $\mathrm{i}^2 w$ F. $\dfrac{w}{\mathrm{i}}$

______________________ (0/1/0)

9. Which two of the alternatives A-F are anti-derivatives to $g(x)=\dfrac{2}{x}$ for $x>0$?

A. $G(x)=\dfrac{2}{x^2}$ B. $G(x)=1-\dfrac{2}{x^2}$ C. $G(x)=-2x^{-2}$

D. $G(x)=2\ln x+1$ E. $G(x)=\ln x^2$ F. $G(x)=(\ln x)^2$

_______________________ (0/1/0)

10. Find $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)-g(0)}{h}$ if $g(x)=4x^2+\sin 3x$ _______________________ (0/0/1)

11. Which two of the following lines A-F are asymptotes to $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x}$?

A. $x=0$

B. $y=0$

C. $x=1$

D. $y=-2x+1$

E. $y=x-2$

F. $y=2x-2$ _______________________ (0/0/1)

12. It holds for the complex numbers z_1 and z_2 that $z_1=3\mathrm{i}$ and $|z_2|=7$
What is the smallest possible value that $|z_1+z_2|$ can assume?

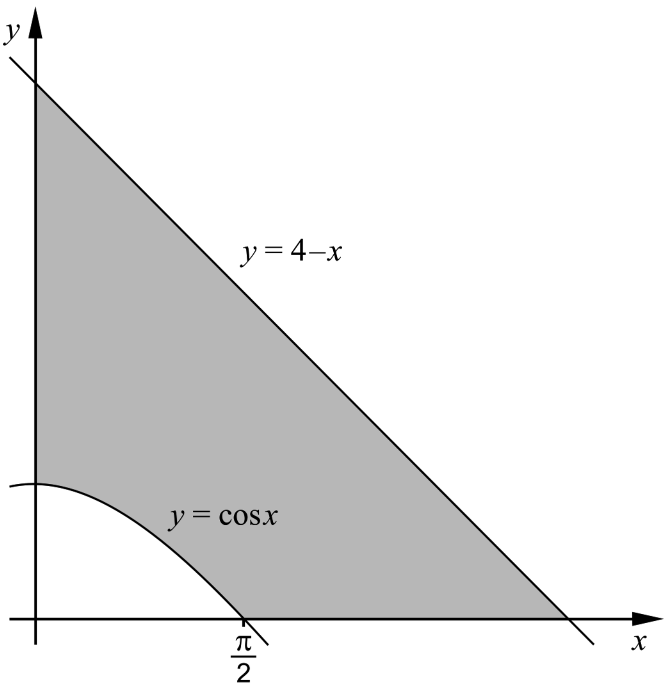
_______________________ (0/0/1)

13. Find an anti-derivative to $f(x)=\cos^2 3x-\sin^2 3x$

_______________________ (0/0/1)

Part C: Digital resources are not allowed. Write your solutions on separate sheets of paper.

14. The figure below shows a shaded region bounded by the curve $y = 4 - x$, the curve $y = \cos x$ and the positive coordinate axes.



Calculate the area of the shaded region. (2/1/0)

15. Show that $\dfrac{\sin 2x}{2\cos x} = \sin x$ for all x where the expressions are defined. (2/0/0)

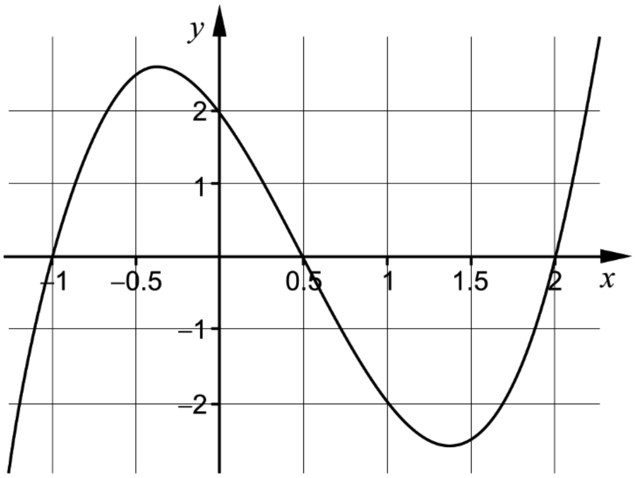
16. Calculate $\dfrac{9+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ and give the answer in the form $a + b\mathrm{i}$ (2/0/0)

17. Solve the equation $\cos(x - 30°) - \cos(x + 30°) = 1$ (0/2/0)

18. Find any possible maximum- and minimum points to the function f where $f(x) = -x\ln x, \quad x > 0$ (0/1/1)

19. Find all integers $n > 0$ for which $(1+\mathrm{i})^n$ is a real number. (0/1/1)

20. The figure below shows the graph of the function $y = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$



Solve the equation $2\cos^3 x - 3\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$ (0/0/2)

21. A function f has the derivative $f'(x) = 4x + 6\cos\dfrac{x}{2}$

a) Show that the function f cannot have a maximum point. (0/1/1)

b) Investigate whether f has a minimum point. (0/0/2)

Part D	Problems 22-30 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital resources, formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 59 points consisting of 21 E-, 22 C- and 16 A-points.

Level requirements for test grades
E: 15 points
D: 23 points of which 7 points on at least C-level
C: 30 points of which 12 points on at least C-level
B: 39 points of which 5 points on A-level
A: 47 points of which 9 points on A-level

The number of points you can have for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge level(s) (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A- point.

For problems labelled "*Only answer is required*" you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: ______________________________

Date of birth: ______________________________

Educational programme: ______________________________

Part D: Digital resources are allowed. Write your solutions on separate sheets of paper.

22. How many degrees are 1.4 radians? *Only answer is required* (1/0/0)

23. Tide is a phenomenon that occurs due to the gravitational forces the moon exerts on the sea level. In the course of one day there are both low tide and high tide. The largest differences between high and low tide on Earth can be found in Newfoundland on the east coast of Canada.

According to a simplified model, the sea level in Newfoundland on a certain day can be described by the function

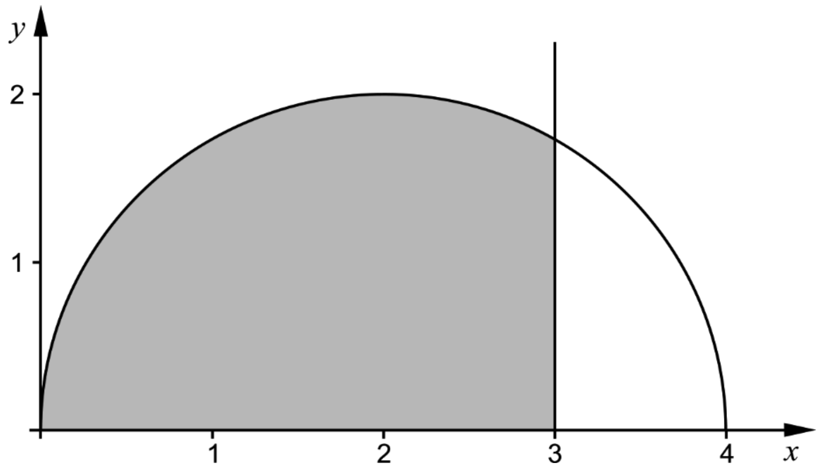
$y = 8.0 + 8.0\cos 0.52x$

where y is the height of the water in metres compared to the lowest water level and x is the number of hours after 03.00

a) Calculate the difference in height between the highest and lowest water level according to the model above. *Only answer is required* (1/0/0)

b) Use the above model and calculate at what rate the height of the water changes at 13.00 (1/1/0)

24. The figure below shows a shaded region bounded by the curve $y = \sqrt{4x - x^2}$, the line $x = 3$ and the x-axis.



When the shaded region is rotated around the x-axis a solid of revolution is formed. Calculate the volume of the solid of revolution and answer to at least three significant figures. (2/0/0)

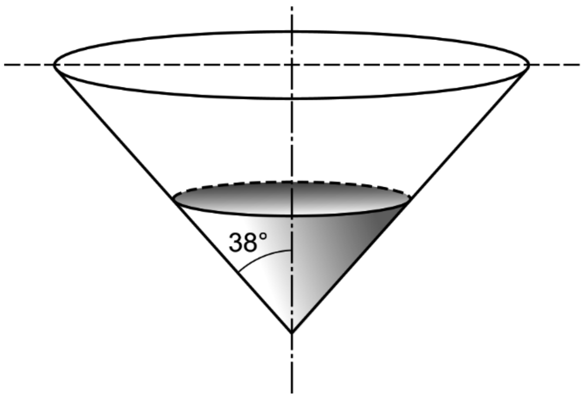
25. Find all roots to the equation $x^3 - 8x = 7.6$
Answer to at least three significant figures. *Only answer is required* (2/0/0)

26. A water tank containing 18 500 litres is emptied at a rate of $v(t)$ litres/minute, where $v(t) = 890 - 12t$ and t is the time in minutes from the start of the emptying.

How many litres pour out of the tank during the first 15 minutes? (0/2/0)

27. Anna has been given the task of solving the following problem:

A container has the shape of a right circular cone, see figure.
Water pours into the container at a rate of 15 litres/min.
At what rate does the height of the water level increase when it is 3.0 dm?

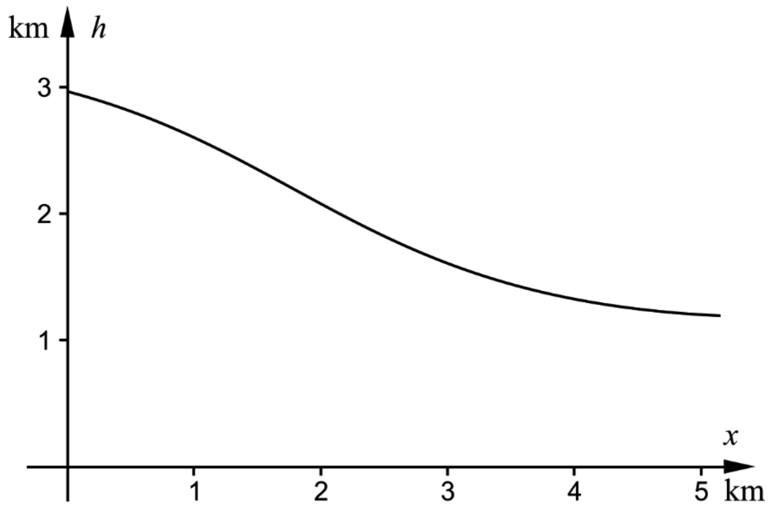


Anna concludes that the relationship is $V = 0.64h^3$, where V is the volume in litres and h is the height of the water level in dm.
She does not know how to proceed from there.

a) Help Anna complete the solution. (0/2/0)

b) Show what Anna may have done to find the relationship $V = 0.64h^3$ (0/3/0)

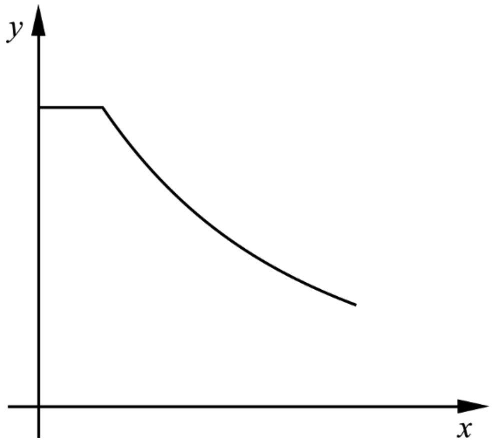
28. A company is building a cabin in the Alps and wants to know the slope of the hill. According to a simplified model, the shape of the hill can be described by the relation $h(x) = 4.1 - \dfrac{5+3e^x}{6+e^x}$ where $h(x)$ is the height in km above sea level and x is the horizontal distance in km.



The company is building the cabin at a part of the hill that is 1.4 km above sea level. Calculate the slope of the hill where the cabin will be built. Answer to at least two significant figures. (0/2/0)

29. A trigonometric curve has a maximum point at $\left(\dfrac{2\pi}{3}, 5\right)$ and a minimum point at $\left(\dfrac{5\pi}{3}, 1\right)$. There are no stationary points between these two points.
Find an equation to the curve.
(0/0/3)

30. Jakob goes to his cottage to cut the rose hedge. The battery to his cordless hedge trimmer is completely empty and needs recharging.



During the first hour when the battery is charged, the charging current is at a constant 1.5 Ampere. According to a simplified model, the charging current then changes at a rate of $\frac{dy}{dx} = -0.468e^{-0.36(x-1)}$ where y is the charging current in Ampere and x is the time in hours from when the charging of the hedge trimmer starts. The battery is considered fully charged when the charging current has decreased to 0.40 Ampere.

How long does it take from the start of the charging until the battery is fully charged? (0/1/2)

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiften i förekommande fall.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. …	$+1\ E_P$
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	$+1\ E_P$

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … $1\ E_R$	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … $1\ E_R$ och $1\ C_R$	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … $1\ E_R$, $1\ C_R$ och $1\ A_R$

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga
Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska
1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska
1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande lista kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\pm$, $\sqrt{\ }$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, x, y, $(\ )$, $[\ ]$, $\int$, $\mathrm{d}x$, gradtecken, index, lim, VL, HL, $\sin v$, $\sin^2 v$
Termer	t.ex. komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot, enhetscirkel, period, amplitud, fasförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, definitionsmängd, värdemängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, intervall, sannolikhetsfördelning, normalfördelning, täthetsfunktion, standardavvikelse, polynomdivision, differentialekvation, begynnelsevillkor
Hänvisningar	t.ex. till de Moivres formel, avståndsformeln, faktorsatsen, enhetscirkeln, trigonometriska formler, deriveringsregler, kedjeregeln, figur
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabell, angivna enheter

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 23b_1 och 23b_2 den första respektive andra poängen i uppgift 23b.

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
B	1a		1										
	1b		1										
	2a		1										
	2b		1										
	3_1	1											
	3_2	1											
	4a	1											
	4b					1							
	5	1											
	6					1							
	7					1							
	8							1					
	9						1						
	10									1			
	11										1		
	12									1			
	13											1	
C	14_1			1									
	14_2			1									
	14_3								1				
	15_1				1								
	15_2				1								
	16_1		1										
	16_2		1										
	17_1						1						
	17_2						1						
	18_1						1						
	18_2										1		
	19_1								1				
	19_2												1
	20_1											1	
	20_2											1	
	21a_1						1						
	21a_2												1
	21b_1												1
	21b_2												1
D	22	1											
	23a			1									
	23b_1			1									
	23b_2							1					
	24_1	1											
	24_2		1										
	25_1		1										
	25_2		1										
	26_1							1					
	26_2							1					
	27a_1							1					
	27a_2							1					
	27b_1								1				
	27b_2								1				
	27b_3								1				
	28_1							1					
	28_2							1					
	29_1											1	
	29_2											1	
	29_3												1
	30_1							1					
	30_2											1	
	30_3											1	
	Total	**6**	**9**	**4**	**2**	**3**	**5**	**9**	**5**	**2**	**2**	**7**	**5**
Σ	**59**	**21**				**22**				**16**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

Del-prov	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma4															
					Aritmetik, algebra och förändring								Samband och förändring					Problem-lösning		
		E	**C**	**A**	**A6**	**A7**	**A8**	**A9**	**A10**	**A11**	**A12**	**A13**	**F17**	**F18**	**F19**	**F20**	**F21**	**P1**	**P3**	**P4**
B	1a	1	0	0											X					
	1b	1	0	0											X					
	2a	1	0	0	X															
	2b	1	0	0	X															
	3	2	0	0							X									
	4a	1	0	0			X													
	4b	0	1	0	X	X	X													
	5	1	0	0									X							
	6	0	1	0						X										
	7	0	1	0							X									
	8	0	1	0		X												X		
	9	0	1	0											X	X				
	10	0	0	1											X					
	11	0	0	1										X						
	12	0	0	1	X	X	X													
	13	0	0	1						X						X		X		
C	14	2	1	0												X		X		
	15	2	0	0						X										
	16	2	0	0	X		X													
	17	0	2	0						X	X									
	18	0	1	1											X					
	19	0	1	1	X			X												
	20	0	0	2					X		X							X		
	21a	0	1	1								X			X					
	21b	0	0	2											X					
D	22	1	0	0						X										
	23a	1	0	0									X					X		
	23b	1	1	0											X			X		
	24	2	0	0												X				
	25	2	0	0					X											
	26	0	2	0												X		X		
	27a	0	2	0											X			X		
	27b	0	3	0						X		X								
	28	0	2	0											X			X		
	29	0	0	3									X					X		
	30	0	1	2												X	X	X	X	
Total		21	22	16																

Kravgränser

Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 59 poäng varav 21 E-, 22 C- och 16 A-poäng.
Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla tre delprov.

Kravgräns för provbetyget
E: 15 poäng
D: 23 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 30 poäng varav 12 poäng på minst C-nivå
B: 39 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 47 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Bedömningsformulär

Elev:____________________________ **Klass:**________________ **Provbetyg:**_____________

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
B	1a												
	1b												
	2a												
	2b												
	3_1												
	3_2												
	4a												
	4b												
	5												
	6												
	7												
	8												
	9												
	10												
	11												
	12												
	13												
C	14_1												
	14_2												
	14_3												
	15_1												
	15_2												
	16_1												
	16_2												
	17_1												
	17_2												
	18_1												
	18_2												
	19_1												
	19_2												

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
C	20_1												
	20_2												
	21a_1												
	21a_2												
	21b_1												
	21b_2												
D	22												
	23a												
	23b_1												
	23b_2												
	24_1												
	24_2												
	25_1												
	25_2												
	26_1												
	26_2												
	27a_1												
	27a_2												
	27b_1												
	27b_2												
	27b_3												
	28_1												
	28_2												
	29_1												
	29_2												
	29_3												
	30_1												
	30_2												
	30_3												
	Total												
Σ													

	Total	6	9	4	2	3	5	9	5	2	2	7	5
Σ	59	21				22				16			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Delprov B

1.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar ($2\cos 2x$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar ($e^x + xe^x$)	+1 E_P
2.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar ($1+2i$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar ($1 \pm 3i$)	+1 E_P
3.		**Max 2/0/0**
	En korrekt angiven vinkel, $290°$, $430°$ eller $650°$	+1 E_B
	med ytterligare en korrekt angiven vinkel	+1 E_B
	Kommentar: Ett svar med en korrekt och en felaktigt angiven vinkel ges första poängen.	
4.		**Max 1/1/0**
a)	Korrekt svar ($-2+3i$)	+1 E_B
b)	Korrekt svar (t ex $3+4i$)	+1 C_B
5.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (3)	+1 E_B
6.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar (Alternativ B: $\frac{\sin 25°}{\tan 25°}$)	+1 C_B

7. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (4) +1 C_B

8. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (Alternativ B: $\mathrm{i}^2 z$ och F: $\frac{w}{\mathrm{i}}$) +1 C_{PL}

9. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (Alternativ D: $G(x) = 2\ln x + 1$ och E: $G(x) = \ln x^2$) +1 C_P

10. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (3) +1 A_B

11. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (Alternativ A: $x = 0$ och E: $y = x - 2$) +1 A_P

12. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (4) +1 A_B

13. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (t ex $\frac{\sin 6x}{6}$) +1 A_{PL}

Delprov C

14. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, t ex anger korrekta uttryck för triangelarean och arean under cosinuskurvan, $A_1 = \frac{4 \cdot 4}{2}$ och $A_2 = \int_0^{\pi/2} \cos x \, \mathrm{d}x$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (7 a.e.) +1 E_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

15. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, använder sinus för dubbla vinkeln +1 E_R

med ett enkelt resonemang som visar att VL = HL +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

16. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex inser att bråket ska förlängas med $2-\mathrm{i}$ +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($4-\mathrm{i}$) +1 E_P

17. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, skriver om vänsterledet till
$\cos x \cos 30° + \sin x \sin 30° - (\cos x \cos 30° - \sin x \sin 30°)$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = 90° + n \cdot 360°$) +1 C_P

18. **Max 0/1/1**

Godtagbar ansats, deriverar funktionen och sätter $f'(x) = 0$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (maximipunkt i $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$) +1 A_P

19. **Max 0/1/1**

Godtagbar ansats, påbörjar ett välgrundat resonemang som leder till att minst ett korrekt värde på n bestäms +1 C_R

med ett välgrundat och nyanserat resonemang som leder till att samtliga korrekta värden på n bestäms ($4, 8, 12, \ldots$) +1 A_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

20. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t ex inser att lösningarna fås genom lösning av ekvationerna $\cos x = -1$, $\cos x = 0{,}5$ samt $\cos x = 2$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x_1 = 180° + n \cdot 360°$, $x_2 = \pm 60° + n \cdot 360°$) +1 A_{PL}

21. **Max 0/1/3**

a) Godtagbar ansats, t ex bestämmer andraderivatan korrekt, $f'' = 4 - 3\sin\frac{x}{2}$ +1 C_P

med godtagbar motivering till att f saknar maximipunkt +1 A_R

b) Visar med ett godtagbart resonemang att f' har ett nollställe och att extrempunkten är en minimipunkt +1 A_R

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Delprov D

22. **Max 1/0/0**

Godtagbart svar ($80°$) +1 E_B

23. **Max 2/1/0**

a) Korrekt svar (16 m) +1 E_M

b) Godtagbar ansats, visar insikt om att det sökta värdet motsvaras av $y'(10)$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3,7 m/h) +1 C_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

24. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex tecknar integralen $\pi\int_0^3\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2\,\mathrm{d}x$ +1 E_B

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (28,3 v.e.) +1 E_P

25. **Max 2/0/0**

Anger minst en godtagbar rot till ekvationen +1 E_P

med godtagbart svar ($x_1 \approx -2{,}09;\ x_2 \approx -1{,}13$ och $x_3 \approx 3{,}22$) +1 E_P

26. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t ex ställer upp ett korrekt integraluttryck för den mängd som rinner ut på 15 min +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (12 000 liter) +1 C_M

27. **Max 0/5/0**

a) Godtagbar ansats, t ex använder kedjeregeln och ställer upp sambandet $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (8,7 cm/min) +1 C_{PL}

b) Godtagbar ansats, t ex ställer upp sambandet $r = h\cdot\tan 38°$ +1 C_R

med ett i övrigt utförligt resonemang som visar att $V = 0{,}64h^3$ +1 C_R

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

28. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t ex löser ekvationen $h(x) = 1{,}4$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($-0{,}26$) +1 C_M

Kommentar: Även svaret 0,26 eller motsvarande svar i procent eller grader anses vara godtagbart.

29. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, bestämmer minst tre av följande punkter

- förskjutning i x-led
- förskjutning i y-led
- amplitud
- period +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (t ex $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{6}) + 3$) +1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

30. **Max 0/1/2**

Godtagbar ansats, t ex visar insikt om att strömmen kan beskrivas med en primitiv funktion +1 C_M

med godtagbar fortsättning, tecknar en ekvation för bestämning av den sökta tiden +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (6,2 h) +1 A_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Bedömda elevlösningar

Uppgift 14

Elevlösning 1 (2 E_{PL})

$$A = \int_0^4 (4-x)\,\Delta x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)\,\Delta x =$$

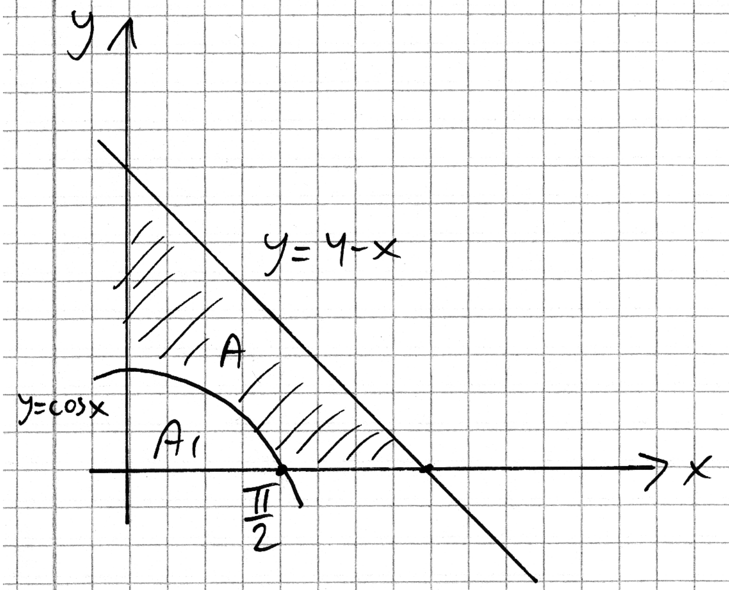
$$= \left[4x - \frac{x^2}{2} + C\right]_0^4 - \left[\sin x + c\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(4^2 - \frac{4^2}{2} - 0\right) - (1 - 0) =$$

$$= 16 - 8 - 1 = 7 \text{ a.e}$$

Svar: Den skuggade arean är 7.a.e.

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Gällande kommunikation saknas motivering till den övre integrationsgränsen i den första integralen och dessutom används beteckningen Δx i integralen. Även i övrigt är lösningen knapphändigt kommunicerad. Dessa brister tillsammans gör att lösningen inte uppfyller kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen två problemslösningspoäng på E-nivå.

Elevlösning 2 (2 E_{PL} och 1 C_K)



Nollställe för $y = 4 - x$

$0 = 4 - x \Rightarrow x = 4$

Hela arean:

$$A_{hela} = \int_0^4 4 - x \, dx = \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 4 \cdot 4 - \frac{4^2}{2} - 4 \cdot 0 - \frac{0^2}{2} =$$

$$= 16 - \frac{16}{2} = 16 - 8 = 8 \text{ ae}$$

A_1 från 0 till $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$A = A_{hela} - A_1 = 8 - 1 = 7 \text{ ae}$$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Gällande kommunikation finns en figur med införda beteckningar som gör lösningen lätt att följa och förstå. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng inklusive en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 15

Elevlösning 1 (1 E_R)

$$\frac{\sin 2x}{2\cos x} = \sin x$$

$$\sin 2x = 2\cos x \cdot \sin x$$

$$2\sin x\cos x = 2\sin x\cos x$$ V.S.V.

Kommentar: Elevlösningen bygger på likheten som ska visas. Lösningen bedöms därmed inte uppfylla kravet för den andra resonemangspoängen på E-nivå.

Uppgift 19

Elevlösning 1 (1 C_R)

$(1+i)^n$ $\quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^5 = i$ o.s.v.

$(1+i)^2 = (1+2i+i^2) = 1+2i-1 = 2i$ ej reellt.

$(1+i)^3 = 2i(1+i) = 2i+2i^2 = 2i-2$ ej reellt

$(1+i)^4 = 2i \cdot 2i = 4i^2 = -4$ reellt.

Svar: $n = 4k$, där k är ett pos. heltal

Kommentar: Elevlösningen visar en prövning där det visas att $n = 4$ är en lösning, vilket nätt och jämnt anses motsvara en godtagbar ansats. Därefter anges ett korrekt svar som varken är baserat på beräkning eller förklarat i ord. Därmed anses inte kraven för ett välgrundat och nyanserat resonemang vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (1 C_R och 1 A_R)

$z = (1+i)^n \quad a + bi \quad a = b = 1$

$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \tan v = 1 \Rightarrow v = 45°$

$z = \sqrt{2}^n (\cos 45° \cdot n + i \sin 45° \cdot n)$

när $\sin v = 0$ är talet reellt. $\sin v = 0$ vid

$v = 0° + m \cdot 180°$, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ heltal

men vi ser på intervallet $v > 0°$

för var fjärde heltal på n blir $v = 0° + m \cdot 180°$.

Alltså $n = 4, 8, 12, \ldots$ osv

Kommentar: Elevlösningen visar en algebraisk metod med ett korrekt men kortfattat resonemang om att då $n = 4, 8, 12, \ldots$ är talet z reellt. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på C-nivå och en resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösning 3 (1 C_R och 1 A_R)

$\arg(1+i) = 45°$

För att få ett reellt tal måste arg vara $k \cdot 180°$, vilket fås om $45°$ mult. med en faktor $4k$.

Alltså $n = 4k$, där k är ett pos. heltal

Kommentar: Elevlösningen visar ett resonemang med korrekt slutsats. Trots att resonemanget är något knapphändigt så anses det vara välgrundat och nyanserat eftersom det tydligt framgår hur slutsatsen dragits. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på C-nivå och en resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 21

Elevlösning 1 (1 C_P och 2 A_R)

a) $f'(x) = 4x + 6\cos\frac{x}{2}$

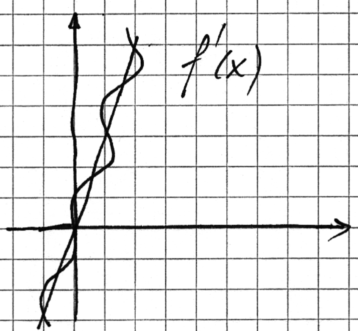
$f'(x) = 0$

$f''(x) = 4 - \frac{6}{2}\sin\frac{x}{2} = 4 - 3\sin\frac{x}{2}$

$f''(x)$ varierar mellan 1 och 7, alltså inget max.

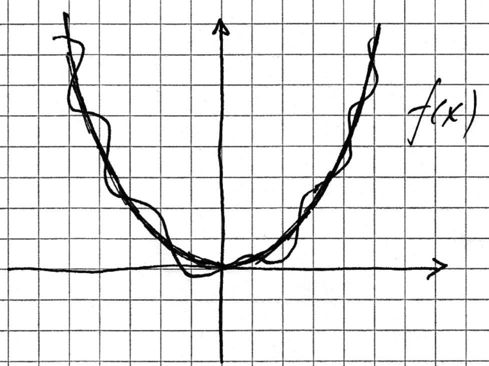
b) $f'(x) = 4x + 6\cos\frac{x}{2}$

cossinuskurva som är vriden till $4x$



$f(x) = 2x^2 + 12\sin\frac{x}{2}$

Sinuskurvan rör sig kring $2x^2$



Detta betyder att f har en minimipunkt

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Gällande kommunikation är inte lösningen helt lätt att följa och förstå. I a)-uppgiften redovisas inte varför ” $f''(x)$ varierar mellan 1 och 7”. Dessutom redovisas inte kopplingen mellan intervallet för andraderivatan och slutsatsen ”alltså inget max”. Den slutsats som dras i b)-uppgiften anses vara knapphändigt motiverad. Dessa brister gör att lösningen inte anses uppfylla kraven för kommunikationspoäng på A-nivå. Sammantaget ges lösningen en procedurpoäng på C-nivå och två resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 C_P, 2 A_R och 1 A_K)

a) $f'(x) = 4x + 6\cos\frac{x}{2}$

$f''(x) = 4 - 3\sin\frac{x}{2}$

$f''(x)\,max = 4 - 3\cdot(-1) = 7$

$f''(x)\,min = 4 - 3\cdot 1 = 1$

$\sin\frac{x}{2}$ kan max anta värdet 1
min anta värdet −1

$3\sin\frac{x}{2}$ kan därför bli något mellan −3 och 3

För att det ska finnas en maximipunkt måste andraderivatan bli negativ. Nu är $f''(x) \geq 1$

Alltså finns ingen maxp.

b) $f'(x) = 4x + 6\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$f(x) = 2x^2 + 12\sin\left(\frac{x}{2}\right) + C$

$12\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ varierar mellan −12 och 12

$2x^2$ går mot positiva oändligheten både då x är ett stort positivt tal och då x är ett stort negativt tal. Detta gör att f(x) också går mot positiva oändligheten både för stora positiva x och stora negativa x.

Alltså måste kurvan ha en vändpunkt (minpunkt) någonstans i mellan.

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Gällande kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng inklusive en kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 23b

Elevlösning 1 (1 E_M)

$y' = -8 \cdot 0{,}52 \sin 0{,}52x = -4{,}16 \sin 0{,}52x$

$y'(10) = -4{,}16 \sin(0{,}52 \cdot 10) \approx 3{,}7$

Svar: Hastigheten är 3,7

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt beräkning av $y'(10)$. Eftersom enhet saknas anses svaret inte vara godtagbart. Sammantaget ges lösningen den första modelleringspoängen på E-nivå.

Uppgift 27

Elevlösning 1 (2 C_{PL} och 2 C_R)

a) $V' = 1{,}92h^2$

$15 = \frac{dh}{dt} \cdot 1{,}92 \cdot 3^2$

$\frac{dh}{dt} \approx 0{,}87$

Svar: $0{,}87 \; dm/min$

b) $V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h^2 \tan^2 38° \cdot h}{3} \approx$

$\approx \frac{\pi h^2 \cdot 0{,}61 h}{3} \approx 0{,}64h^3$ V.S.V.

Kommentar: Elevlösningen är knapphändig men behandlar uppgiften i sin helhet. Lösningen anses nätt och jämnt uppfylla kraven för två problemlösningspoäng och två resonemangspoäng på C-nivå. Gällande kommunikation saknas förklaringar till beräkningarna i båda deluppgifterna. Det är inte lämpligt att använda beteckningen V' i detta sammanhang. I och med dessa brister anses inte lösningen uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C_{PL}, 2 C_R och 1 C_K)

a) $\frac{dV}{dt} = 15$ l/min $\quad \frac{dh}{dt}$ vill vi veta

$V = 0{,}64h^3 \quad V'(h) = 1{,}92h^2$

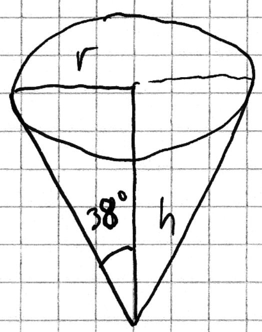
$\frac{dV}{dt} \Big/ \frac{dV}{dh} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dh}{dV} = \frac{dh}{dt}$

$15/1{,}92h^2 = \frac{dh}{dt} \quad h = 3$ dm

$15/(1{,}92 \cdot 3^2) \approx 0{,}868$ dm/min

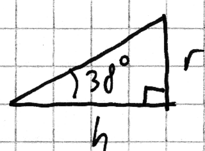
vattennivån ökar med cirka 0,87 dm/min

b)



såhär kan hon ha gjort:

$V_{kon} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$



$\tan 38° = \frac{r}{h}$

$\tan(38°) \cdot h = r$

$r \approx 0{,}78h$

$V_{kon} = \frac{\pi \cdot (0{,}78h)^2 \cdot h}{3} \approx 0{,}64h^3$ VSV.

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Gällande kommunikation förklaras beräkningarna i båda deluppgifterna och lösningen innehåller en förtydligande figur till b)-uppgiften. Lösningen anses uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng inklusive en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 29

Elevlösning 1 (2 A_{PL})

$\left(\frac{2\pi}{3}, 5\right) \quad \left(\frac{5\pi}{3}, 1\right)$

$y = A\sin k(x+\varphi) + B$

$5-1=4$

$A=2$

$5+1=6$

$B=3$

$\frac{5\pi}{3} = 300^\circ \quad \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$

$300^\circ - 120^\circ = 180^\circ$

$k=1$

$120^\circ - 90^\circ = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

$\varphi = -\frac{\pi}{6}$

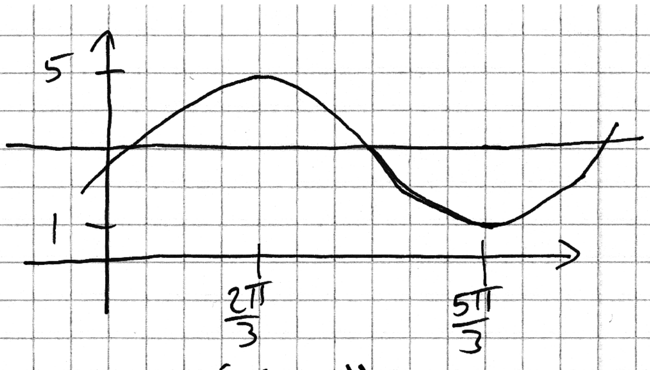
Svar: $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 3$

Kommentar: Elevlösningen är knapphändig men behandlar uppgiften i sin helhet. Gällande kommunikation saknas förklaringar till beräkningarna, t ex saknas helt motivering till varför $k=1$. Även förklaring till varför förskjutningen i x-led är $-\frac{\pi}{6}$ saknas. I och med detta anses inte lösningen uppfylla kraven för kommunikationspoäng på A-nivå. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 A_{PL} och 1 A_K)

maximipunkt $\left(\frac{2\pi}{3}, 5\right)$

minimipunkt $\left(\frac{5\pi}{3}, 1\right)$



Trigonometrisk funktion: $y = A\sin(k(x+d)) + C$

$A = \frac{\text{största värde} - \text{minsta värde}}{2} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$\text{perioden} = \frac{360}{k} = \frac{2\pi}{k}$

Från $\frac{2\pi}{3}$ till $\frac{5\pi}{3}$ är det en halv period

$\frac{5\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} = \pi$

1 period är då $2\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

C = hur den är förskjuten i y-led. Värdet mittemellan största och minsta värdet, alltså då $y = 3$

För kurvan $y = \sin x$ blir största värdet vid $\sin x = 1$, alltså då $x = \frac{\pi}{2}$

MEN vi har största värdet vid $\frac{2\pi}{3}$ vilket betyder att kurvan är förskjuten $\frac{\pi}{6}$ rad åt höger $d = \frac{\pi}{6}$

kurvan blir då $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet även om bestämningen av förskjutningen i x-led är felaktig. Gällande kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå då det motiveras tydligt hur amplitud, period och förskjutning i y-led beräknas. Sammantaget ges lösningen en problemlösningspoäng på A-nivå samt en kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 30

Elevlösning 1 (1 C_M)

Under den första timmen konstant 1,5 A

Efter det minskar med

$$\frac{dy}{dx} = -0{,}468\,e^{-0{,}36(x-1)}$$

y – strömmen i ampere

x – tiden i timmar

Fulladdat 0,4 A

Minskning $1{,}5-0{,}4 = 1{,}1$ A

$$\int_0^x -0{,}468\,e^{-0{,}36(x-1)}\,dx = 1{,}1$$

$$\int_0^x -0{,}468\,e^{-0{,}36(x-1)}\,dx = \left[\frac{-0{,}468\,e^{-0{,}36(x-1)}}{-0{,}36}\right]_0^x =$$

$$= 1{,}3e^{-0{,}36(x-1)} - 1{,}3\cdot e^{0} = 1{,}1$$

$$1{,}3e^{-0{,}36(x-1)} = 2{,}4$$

$$e^{-0{,}36(x-1)} = 1{,}846153846$$

$$-0{,}36(x-1) = -\ln 1{,}84\ldots$$

$$x-1 = 1{,}703$$

$$x = 2{,}703$$

Svar: Det tar 2,7 timmar.

Kommentar: I elevlösningen visas insikt om att strömmen ges av den primitiva funktionen till $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ i och med att integralen tecknas på rad åtta i lösningen. Detta anses motsvara en godtagbar ansats trots att integralen innehåller brister, t ex felaktig undre integrationsgräns. Sammantaget ges lösningen en modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (1 C_M och 1 A_M)

$1,5 - 0,4 = 1,1$

Vi söker x då $\int_1^x (-0,468e^{-0,36(x-1)})dx = -1,1$

Använder räknaren och kommer fram till att $x = 6,2$

Svar: Det tar 6,2 h

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Översta raden samt den godtagbart uppställda ekvationen motiveras inte. Hur räknaren använts för att lösa ekvationen motiveras inte heller. Därmed anses inte kravet för den sista modelleringspoängen vara uppfyllt. Sammantaget ges lösningen en modelleringspoäng på C-nivå och en modelleringspoäng på A-nivå.

Elevlösning 3 (1 C_M och 2 A_M)

$$\frac{dy}{dx} = -0{,}468e^{-0{,}36(x-1)}$$

$y = 0{,}40$ A

$$\frac{-0{,}468}{-0{,}36} = 1{,}3$$

$$y = 1{,}3e^{-0{,}36(x-1)} + C$$

då $x = 1$ är $y = 1{,}5 \Rightarrow$

$1{,}5 = 1{,}3e^{0} + C \Rightarrow C = 0{,}2$

$$0{,}4 = 1{,}3e^{-0{,}36(x-1)} + 0{,}2$$

$$\ln\frac{0{,}2}{1{,}3} = -0{,}36(x-1)\cdot \cancel{\ln e}$$

$$\frac{\ln\frac{0{,}2}{1{,}3}}{-0{,}36} = x-1 \Rightarrow x = \frac{\ln\frac{0{,}2}{1{,}3}}{-0{,}36} + 1 \Rightarrow x \approx 6{,}2$$

svar: Det tar 6,2 h

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. En funktion för strömmen bestäms genom att en korrekt primitiv funktion med begynnelsevillkor ställs upp. Lösningen innehåller även en korrekt ekvation för bestämning av den sökta tiden och lösningen av ekvationen anses godtagbar. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng.

Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnena.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Kunskapskrav Matematik kurs 4

Betyget E Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena **i bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

Betyget D Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

Betyget C Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade** matematiska resonemang och värdera med **nyanserade** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

Betyget B Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

Betyget A Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja**, tillämpa **och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

Centralt innehåll Matematik kurs 4

Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:

Aritmetik, algebra och geometri

A6 Metoder för beräkningar med komplexa tal skrivna på olika former inklusive rektangulär och polär form.
A7 Komplexa talplanet, representation av komplext tal som punkt och vektor.
A8 Konjugat och absolutbelopp av ett komplext tal.
A9 Användning och bevis av de Moivres formel.
A10 Algebraiska och grafiska metoder för att lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter och reella polynomekvationer av högre grad, även med hjälp av faktorsatsen.
A11 Hantering av trigonometriska uttryck samt bevis och användning av trigonometriska formler inklusive trigonometriska ettan och additionsformler.
A12 Algebraiska och grafiska metoder för att lösa trigonometriska ekvationer.
A13 Olika bevismetoder inom matematiken med exempel från områdena aritmetik, algebra eller geometri.

Samband och förändring

F17 Egenskaper hos trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner och absolutbeloppet som funktion.
F18 Skissning av grafer och tillhörande asymptoter.
F19 Härledning och användning av deriveringsregler för trigonometriska, logaritm-, exponential- och sammansatta funktioner samt produkt och kvot av funktioner.
F20 Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av integraler med och utan digitala verktyg, inklusive beräkningar av storheter och sannolikhetsfördelning.
F21 Begreppet differentialekvation och dess egenskaper i enkla tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.

Problemlösning

P1 Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
P3 Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
P4 Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.