

<b>Part B</b>	Problems 1-6 which only require answers.
<b>Part C</b>	Problems 7-15 which require complete solutions.
<b>Test time</b>	150 minutes for Part B and Part C together.
<b>Resources</b>	Formula sheet and ruler.

**Level requirements**

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 67 points of which 23 E-, 24 C- and 20 A-points.

Level requirements for test grades

E: 18 points

D: 27 points of which 8 points on at least C-level

C: 35 points of which 14 points on at least C-level

B: 46 points of which 7 points on A-level

A: 55 points of which 12 points on A-level

The number of points you can have for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge level(s) (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A- point.

For problems labelled “*Only answer required*” you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thoughts and, where necessary, draw figures.

**Write your name, date of birth and educational program on all the sheets you hand in.**

Name: _____
Date of birth: _____
Educational program: _____

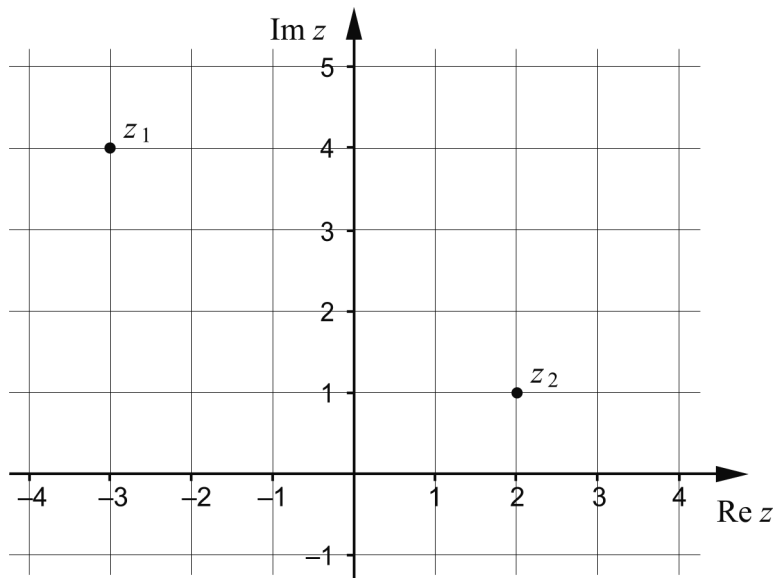
**Part B:** Digital resources are not allowed. Only answer is required. Write your answers in the test booklet.

1. Differentiate

a)  $f(x) = \sin 2x$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)

b)  $g(x) = (4x+1)^5$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)

2. The figure shows a complex plane where the numbers  $z_1$  and  $z_2$  are represented.

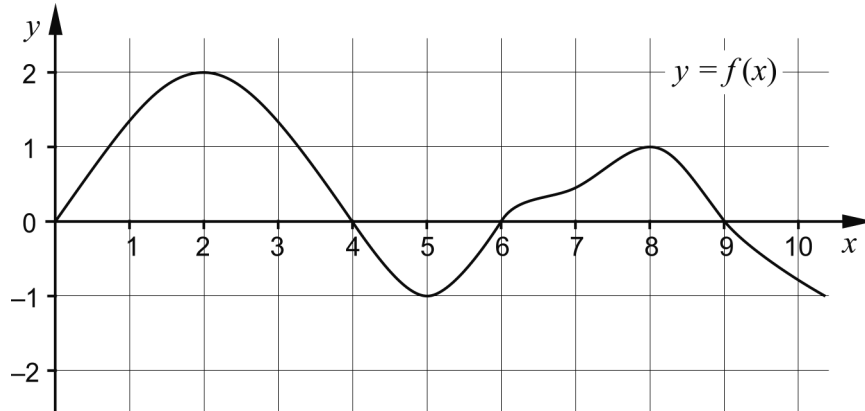


a) Find  $\bar{z}_2$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)

b) Find  $z_1 + z_2$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)

3. What is the vertical asymptote of  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)

4. The figure shows the graph of the function  $f$ .



For what value of  $a$  in the interval  $0 \leq a \leq 10$  does

- $\int_0^a f(x) dx$  have its largest value? \_\_\_\_\_ (0/1/0)

5. For what angles in the interval  $0^\circ < \nu < 90^\circ$  does it hold that  $\sin 3\nu < \frac{1}{2}$ ?  
 \_\_\_\_\_ (0/1/1)

6. Write down a continuous function  $f$  which is defined for all  $x$  and has the range  $-1 \leq f(x) \leq 7$   
 \_\_\_\_\_ (0/0/1)

**Part C:** Digital resources are not allowed. Write your solutions on separate sheets of paper.

7. Some students have been given the task of evaluating  $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

Agnes gets the answer  $e$

Ingela gets the answer  $0$

Kerstin gets the answer  $1$

Has any of them calculated correctly? Justify your answer. (2/0/0)

8. It holds for two complex numbers  $z_1$  and  $z_2$  that:

- $z_1 \cdot z_2 = 7 + i$
- $z_1 = 3 - i$

Calculate  $z_2$  in the form  $a + bi$  (2/0/0)

9. a) Show that  $\cos^2 x \left( \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 \right) = 1$  for all  $x$  where the expressions are defined.

(2/0/0)

- b) Show that  $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$

(0/2/0)

10. Solve the equation  $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(1/1/0)

11. It holds for the function  $f$  that  $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$
- Write down the asymptotes of the function  $f$  *Only answer required* (1/1/0)
  - Sketch the graph of the function  $f$  and its asymptotes. (0/2/0)
  - Solve the inequality  $|f(x)| > 3$  where  $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$  (0/0/2)
12. The equation  $z^p = i$  will be investigated for different values of the integer  $p$ . For some values of the integer  $p$ ,  $z_1 = \cos 9^\circ + i \sin 9^\circ$  is a solution to the equation  $z^p = i$
- Show that this holds for  $p = 50$ , that is, show that  $z_1$  is a solution to  $z^{50} = i$  (0/2/0)
  - Find all integer values of  $p$  for which  $z_1$  is a solution to the equation  $z^p = i$  (0/0/2)
13. For the polynomial function  $p$  it holds that  $p(z) = z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8$
- Show that  $(z^2 + 4)$  is a factor in the polynomial  $p$ . (0/2/0)
  - Solve the equation  $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = 0$  (0/1/2)
14. Evaluate  $\int_0^{\pi/6} (2 \sin x + 5) \cos x \, dx$  (0/0/2)

15. Lasse and Niklas are solving the following problem:

Investigate if the function  $f(x) = \frac{1}{2x-5}$  has any global maximum when  $x \geq 0$

This is how Lasse solves the problem:

$$f(x) = \frac{1}{2x-5}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{(2x-5)^2} < 0 \quad \text{for all } x.$$

Then  $f$  is decreasing and has its maximum value at the left end point, that is when  $x=0$ .

$$f(0) = -\frac{1}{5}$$

Answer: The maximum value is  $-\frac{1}{5}$

Niklas says that Lasse's answer is wrong since the function can have larger values than  $-\frac{1}{5}$ . For example, the function has the value 1 when  $x = 3$

Investigate what mistake Lasse makes in his solution and then solve the given problem.

(0/0/3)

<b>Part D</b>	Problems 16-23 which require complete solutions.
<b>Test time</b>	120 minutes.
<b>Resources</b>	Digital resources, formula sheet and ruler.

**Level requirements**

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 67 points of which 23 E-, 24 C- and 20 A-points.

Level requirements for test grades

E: 18 points

D: 27 points of which 8 points on at least C-level

C: 35 points of which 14 points on at least C-level

B: 46 points of which 7 points on A-level

A: 55 points of which 12 points on A-level

The number of points you can have for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge level(s) (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A- point.

For problems labelled “*Only answer required*” you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thoughts and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

**Write your name, date of birth and educational program on all the sheets you hand in.**

Name: _____
Date of birth: _____
Educational program: _____

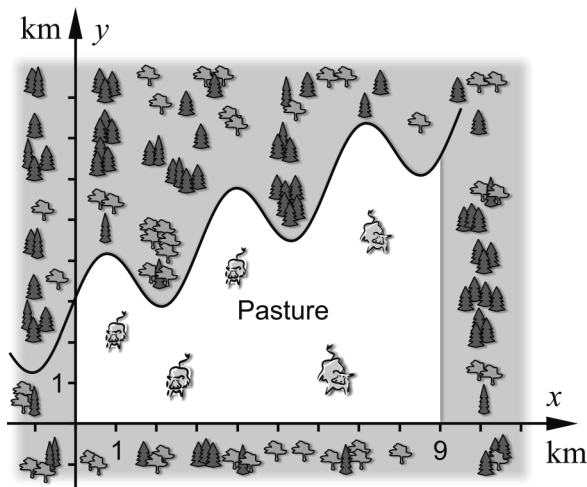




**Part D:** Digital resources are allowed. Write your solutions on separate sheets of paper.

16. Write the complex number  $z = 2 + 2i$  in the polar form. (2/0/0)

17. A pasture for cows is bounded by a forest and a winding creek according to the figure below.



The location of the creek can according to a simplified model be described by the function  $f(x) = 0.5x + \sin 2x + 3$

Calculate the area of the pasture. (2/0/0)

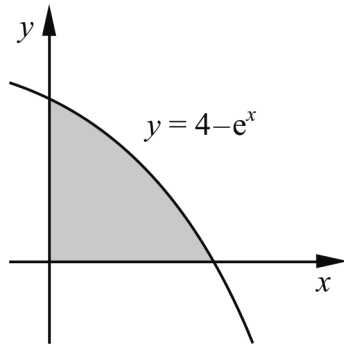
18. The equation  $\frac{x}{5} + \cos 2x = 2$  has several solutions.

All solutions lie in the interval  $-20 \leq x \leq 20$

a) Calculate the smallest solution to the equation.  
Round your answer to at least three significant figures. (1/0/0)

b) Determine the number of solutions to the equation. (1/0/0)

19. The figure below shows the region bounded by the curve  $y = 4 - e^x$  and the coordinate axes.



When the area is rotated around the  $x$ -axis, a solid of revolution is formed. Write down an expression for the volume of the solid of revolution and calculate its value correct to at least three significant figures.

(0/3/0)

20. A nestling falls from a 8.0 metre high cliff. To describe the falling motion in a simplified way, the following differential equation can be used:  
 $\frac{dv}{dt} + 5v = 10$  where  $v$  is the speed of the falling motion in m/s after time  $t$  seconds.

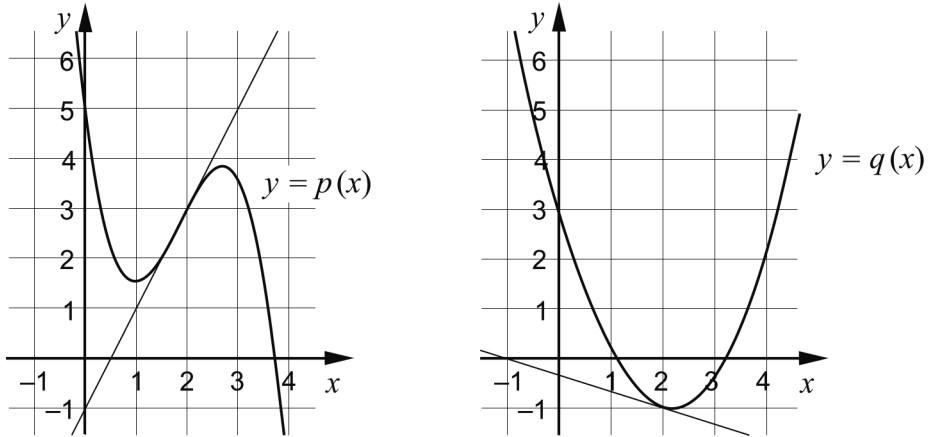
- a) Show that  $v(t) = 2 - 2 \cdot e^{-5t}$  is a solution to the differential equation. (1/0/0)
- b) Calculate the time it takes for the nestling to fall 8.0 m. (0/3/0)

21. A company has investigated how long customers calling its customer service must wait before getting an answer. They have found that the waiting time  $t$  minutes has a distribution that can be described by the probability density function

$$f(t) = \frac{1}{6} e^{-t/6}, \quad t \geq 0$$

- a) Calculate the probability that a customer has to wait 10 minutes at the most. (0/2/0)
- b) The company wants to inform about the results from the survey with the following statement: "Our customer survey shows that 50 % of our customers have to wait  $x$  minutes at the most." Calculate the value of  $x$ . (0/2/0)

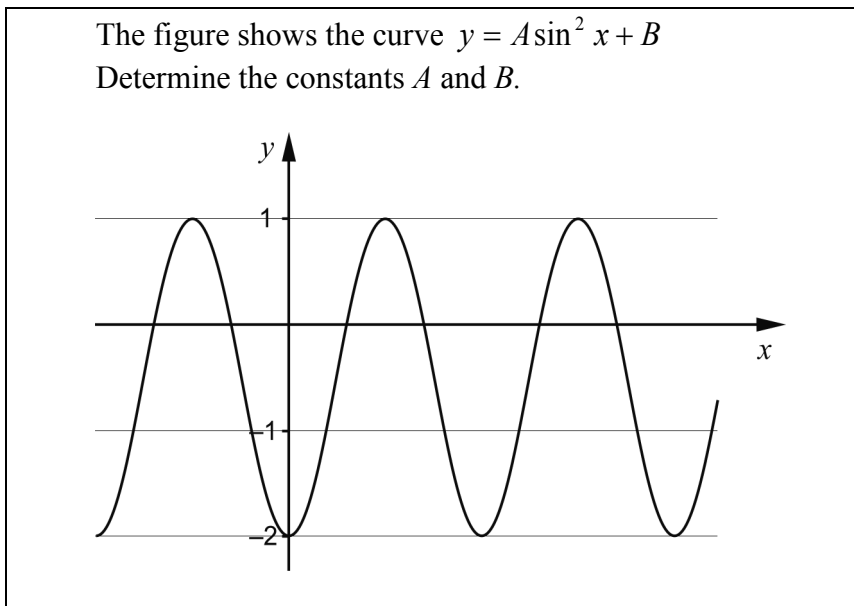
22. The figures show the curves  $y = p(x)$  and  $y = q(x)$  and also the tangents to these at  $x = 2$



Let  $r(x) = p(x) \cdot q(x)$  and determine  $r'(2)$ .

(0/0/2)

23. In Lisa's mathematics book there is the following problem:



This is how Lisa solves the problem:

$$A = \frac{1 - (-2)}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$B = \frac{1 + (-2)}{2} = \frac{-1}{2} = -0.5 \quad \text{Answer: } A = 1.5 \text{ and } B = -0.5$$

Lisa's solution is not correct. Help Lisa solve the problem correctly.

(0/0/2)

### **To the student - Information about the oral part**

You will be given a problem that you will solve in writing, and then you will present your solution orally. If you need, you can ask your classmates and your teacher for help when solving the problem. Your oral presentation starts with you presenting what the problem is about and then you describe and explain your solution. You must present all steps in your solution. However, if you have done the same calculation several times (for example in a table) it might be sufficient if you present some of the calculations. Your presentation should take a maximum of 5 minutes, and be held to a smaller group of your classmates and your teacher.

The problem given to you should, on the whole, be solved algebraically. You might need a calculator to do some of the calculations but, when presenting your solution, you should avoid referring to the use of your calculator for drawing graphs and/or symbolic handling (if that is the type of calculator you are using).

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

#### *How complete, relevant and structured your presentation is*

Your presentation must contain the necessary parts in order for a listener to follow and understand your thoughts. What you say should be in a suitable order and be relevant. The listener must understand how calculations, descriptions, explanations and conclusions are connected with each other.

#### *How well you describe and explain the train of thought behind your solution*

Your presentation should contain both descriptions and explanations. To put it simple, a description answers the question *how* and an explanation answers the question *why*. You describe something when you for instance tell *how* you have done a calculation. You explain something when you for instance justify *why* you could use a certain formula.

#### *How well you use the mathematical terminology*

In your presentation you should use a language that contains mathematical terms, expressions and symbols, suitable for the problem you have solved.

Mathematical terms are for example words like “exponent”, “function” and “graph”.

An example of a mathematical expression is that  $x^2$  is read “ $x$  to the power 2” or “ $x$  squared”. Some examples of mathematical symbols are  $\pi$  and  $f(x)$ , which are read “pi” and “ $f$  of  $x$ ”.

**Problem 1. Polynomial Equation**

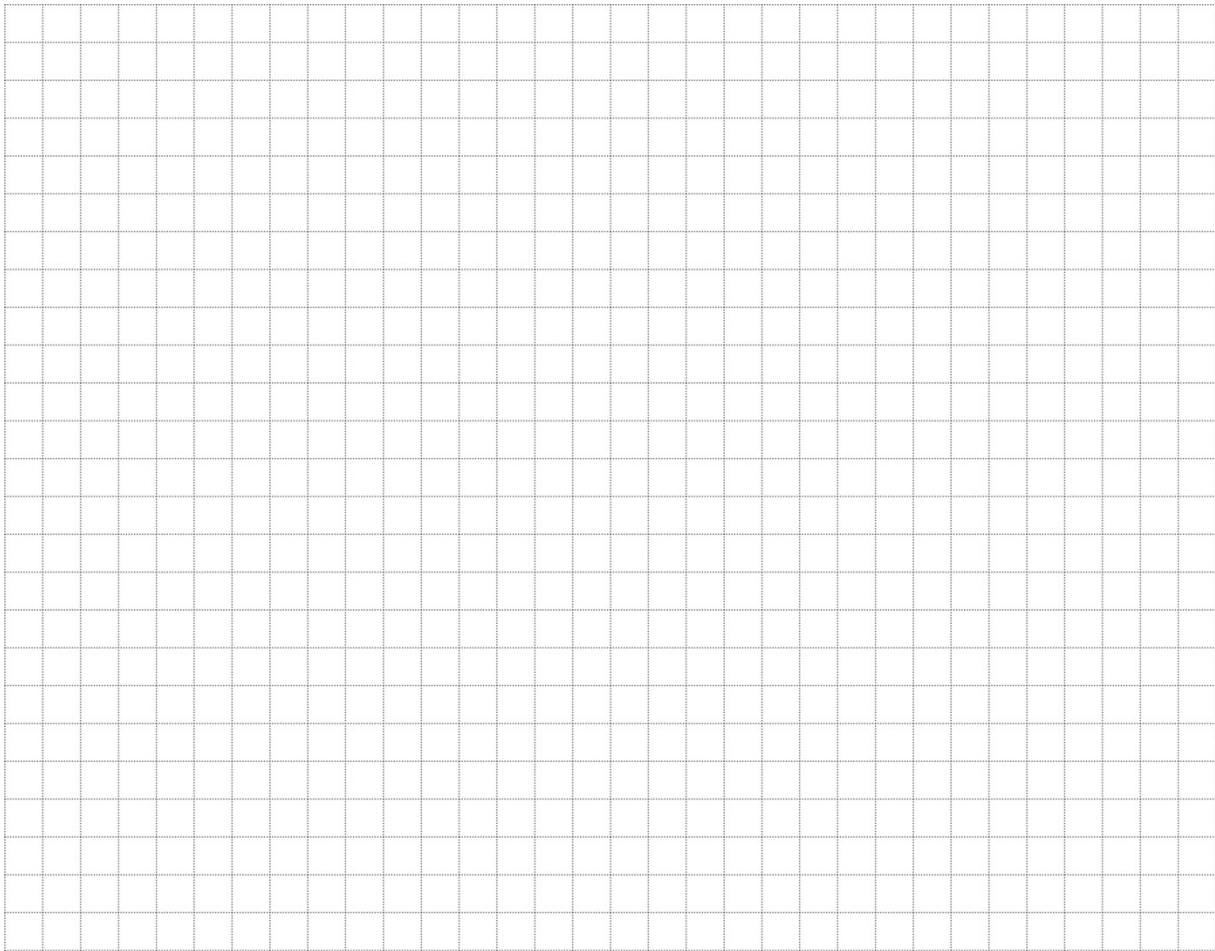
Name: \_\_\_\_\_

**When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:**

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

a) Show that  $z = 1$  is a solution to the equation  $z^4 - 7z^3 + 19z^2 - 13z = 0$

b) Find all solutions to the equation  $z^4 - 7z^3 + 19z^2 - 13z = 0$



**Problem 2. Solid of Revolution**

Name: \_\_\_\_\_

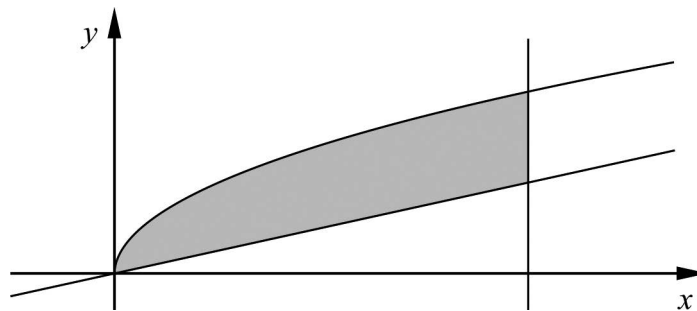
**When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:**

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

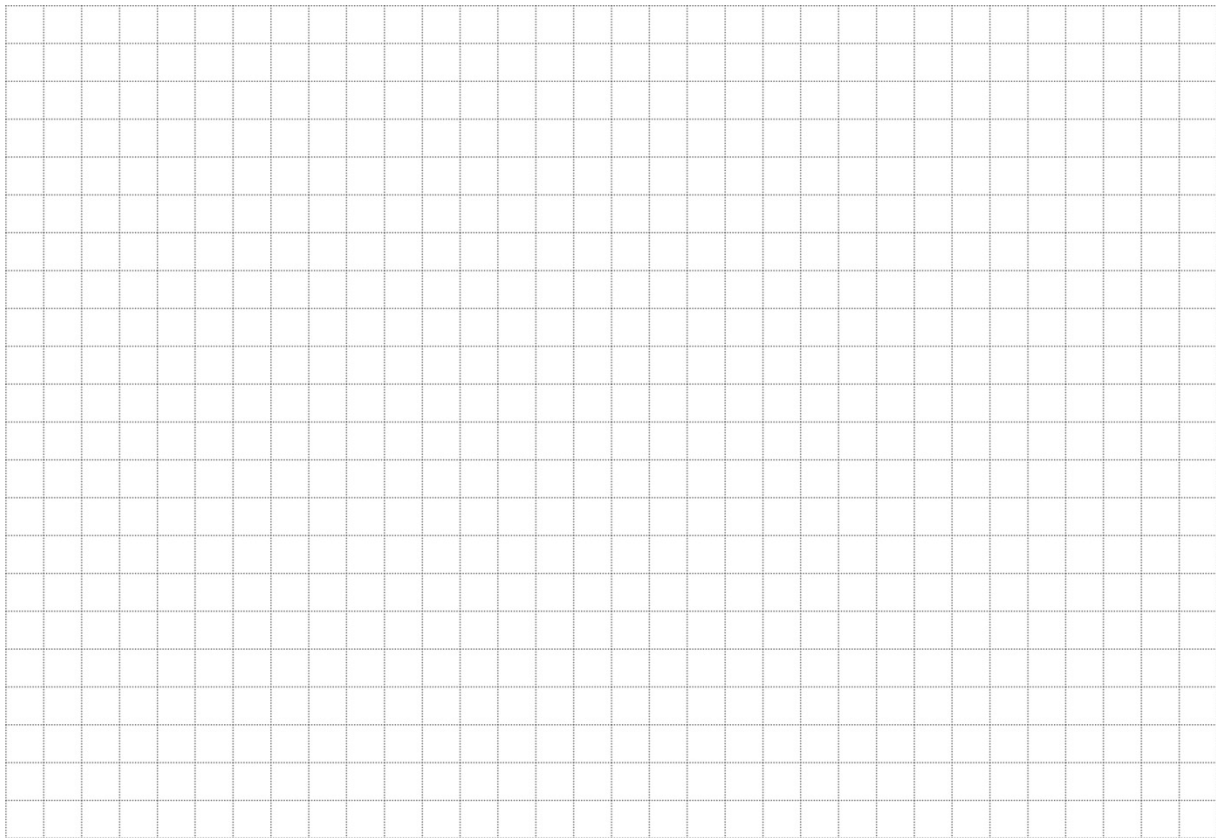
A region in the first quadrant is bounded by the line  $y = \frac{x}{4}$ , the line  $x = 4$  and the

curve  $y = \sqrt{x}$

Let the region rotate around the  $x$ -axis.



Calculate the volume of the solid of revolution.



**Problem 3. The Age of a Star**

Name: \_\_\_\_\_

**When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:**

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

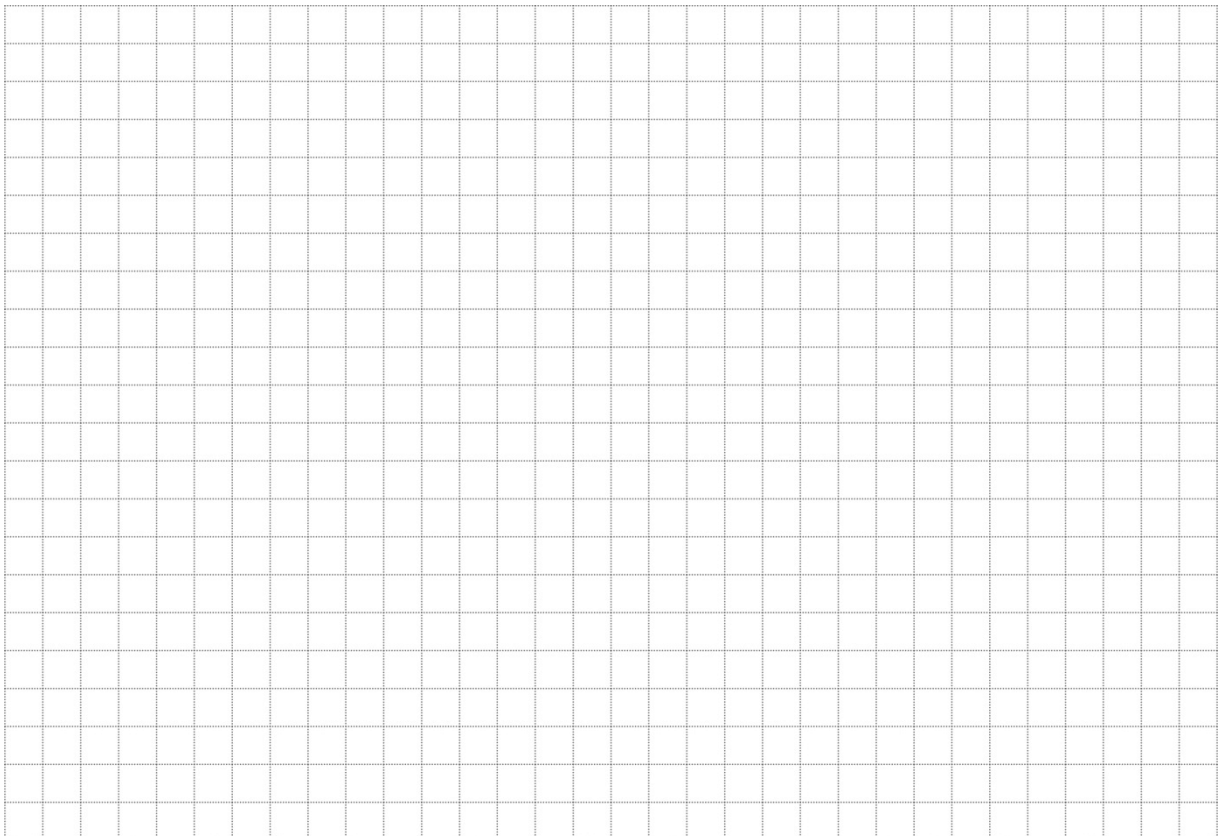
By analysing the light from a star, space physicists can determine how much of the substance uranium-238 that is remaining in the star. It is then possible to determine the age of the star.

Atomic nuclei of uranium-238 has a decay rate that is proportional to the number of the remaining atomic nuclei,  $N$ , at the time  $t$  years. The decay can then be described by the differential equation  $\frac{dN}{dt} - kN = 0$  where  $k$  is a constant.

- a) Show that  $N(t) = N_0 e^{kt}$  is a solution to the differential equation.

By analysing the light from the star CS 31082-001 physicists have determined that approximately 14.6 % of the original amount of uranium-238 in the star remains. The half-life, that is the time it takes for half of the atomic nuclei to decay, is  $4.5 \cdot 10^9$  years for uranium-238.

- b) Calculate the age of the star.



### Problem 4. Trigonometric Equations

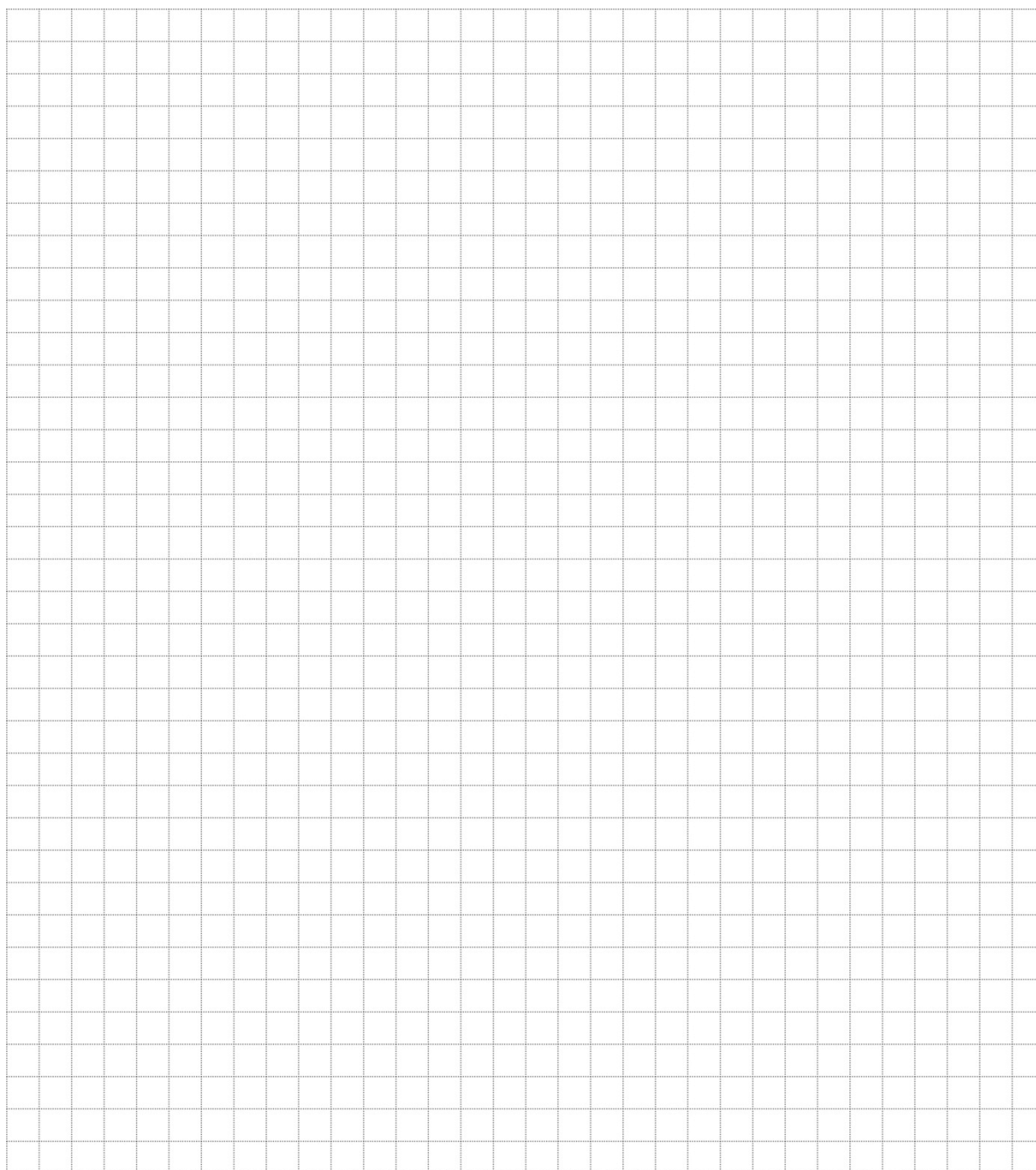
Name: \_\_\_\_\_

**When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:**

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

a) Find all solutions to the equation  $\cos 2x = 0$

b) Find all solutions to the equation  $(\sin 5x - 0.4) \cdot \cos 2x = 0$





**Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga**

<b>Kommunikativ förmåga</b>	<b>E</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>Max</b>
<p><b><i>Fullständighet, relevans och struktur</i></b></p> <p>Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.</p>	<p>Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande.</p> <p>Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig.</p> <p>(1/0/0)</p>		<p>Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår.</p> <p>Redovisningen är välstrukturerad.</p> <p>(1/0/1)</p>	(1/0/1)
<p><b><i>Beskrivningar och förklaringar</i></b></p> <p>Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.</p>	<p>Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar.</p> <p>Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad.</p> <p>(1/0/0)</p>		<p>Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar.</p> <p>(1/0/1)</p>	(1/0/1)
<p><b><i>Matematisk terminologi</i></b></p> <p>Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen.</p> <p>(1/0/0)</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen.</p> <p>(1/1/0)</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen.</p> <p>(1/1/1)</p>	(1/1/1)
<b>Summa</b>				<b>(3/1/3)</b>

## Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning .....	3
Bedömningsanvisningar .....	3
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga .....	4
Provsammanställning – Kunskapskrav .....	5
Provsammanställning – Centralt innehåll .....	6
Kravgränser .....	7
Bedömningsanvisningar .....	8
Del B.....	8
Del C.....	9
Del D.....	12
Bedömda elevlösningar .....	14
Uppgift 9a .....	14
Uppgift 9b.....	15
Uppgift 11b.....	16
Uppgift 11c.....	18
Uppgift 12b.....	20
Uppgift 13.....	20
Uppgift 14.....	22
Uppgift 15.....	23
Uppgift 20.....	24
Uppgift 21.....	26
Uppgift 21b.....	27
Uppgift 23.....	28
Ur ämnesplanen för matematik .....	29
Kunskapskrav Matematik kurs 4.....	30
Centralt innehåll Matematik kurs 4.....	31
Bedömningsformulär.....	32
Insamling av provresultat för matematik .....	33
Urvalsinsamlingen .....	33



## Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som provas. De olika förmågorna är inte beroende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E<sub>PL</sub> och A<sub>R</sub> ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknepfel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

## Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt olika modeller:

---

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E <sub>p</sub>
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...)	+1 E <sub>p</sub>

*Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.*

---

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ...
1 E <sub>R</sub>	1 E <sub>R</sub> och 1 C <sub>R</sub>	1 E <sub>R</sub> , 1 C <sub>R</sub> och 1 A <sub>R</sub>

*Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).*

### **Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga**

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå ( $C_K$ ) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan innehålla något ovidkommande eller sakna något steg. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå ( $A_K$ ) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

Förutom den allmänna beskrivningen av kraven kan ibland mer utförliga beskrivningar ges i samband med de bedömda elevlösningar där kommunikationspoäng förekommer.

## Provsammanställning – Kunskapskrav

**Tabell 1** Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 21a\_1 och 21a\_2 den första respektive andra poängen i uppgift 21a.

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå																
		E				C				A								
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK					
Del A	M_1				1													
	M_2																	1
	M_3				1													
	M_4																	1
	M_5				1													
	M_6								1									
	M_7																	1
Del B	1a		1															
	1b		1															
	2a	1																
	2b		1															
	3	1																
	4					1												
	5_1					1												
	5_2									1								
6									1									
Del C	7_1		1															
	7_2				1													
	8_1			1														
	8_2			1														
	9a_1				1													
	9a_2				1													
	9b_1							1										
	9b_2							1										
	10_1		1															
	10_2					1												
	11a_1	1																
	11a_2					1												
	11b_1					1												
	11b_2							1										
	11c_1											1						
	11c_2									1								
	12a_1						1											
	12a_2						1											
	12b_1												1					
	12b_2													1				
Del D	13a_1												1					
	13a_2												1					
	13b_1							1										
	13b_2															1		
	13b_3																1	
	14_1															1		
	14_2															1		
	15_1																	1
	15_2																	1
	15_3																	1
	16_1	1																
	16_2	1																
	17_1							1										
	17_2							1										
	18a		1															
	18b		1															
	19_1									1								
	19_2									1								
	19_3									1								
	20a		1															
	20b_1												1					
20b_2												1						
20b_3													1					
21a_1												1						
21a_2												1						
21b_1												1						
21b_2												1						
22_1														1				
22_2																1		
23_1																1		
23_2																1		
<b>Total</b>		<b>5</b>	<b>8</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>8</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>9</b>	<b>7</b>					
<b>Σ</b>	<b>67</b>	<b>23</b>				<b>24</b>				<b>20</b>								

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

## Provsammanställning – Centralt innehåll

**Tabell 2** Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma4																			
		E	C	A	Aritmetik, algebra och förändring									Samband och förändring					Problem-lösning					
					A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	F17	F18	F19	F20	F21	P1	P3	P4				
Del A		3	1	3																				
Del B	1a	1	0	0													X							
	1b	1	0	0													X							
	2a	1	0	0																				
	2b	1	0	0	X	X																		
	3	1	0	0												X								
	4	0	1	0															X					
	5	0	1	1							X				X									
	6	0	0	1											X									
Del C	7	2	0	0													X							
	8	2	0	0	X																X			
	9a	2	0	0						X		X												
	9b	0	2	0						X		X												
	10	1	1	0							X													
	11a	1	1	0												X								
	11b	0	2	0												X								
	11c	0	0	2											X	X					X			
	12a	0	2	0	X				X															
	12b	0	0	2	X				X													X		
	13a	0	2	0						X			X											
	13b	0	1	2						X												X		
	14	0	0	2							X									X		X		
	15	0	0	3												X								
	Del D	16	2	0	0	X																		
17		2	0	0														X			X			
18a		1	0	0							X													
18b		1	0	0							X													
19		0	3	0														X						
20a		1	0	0															X					
20b		0	3	0																X		X		
21a		0	2	0														X			X			
21b		0	2	0														X			X			
22		0	0	2													X				X			
23		0	0	2							X			X							X			
Total			23	24	20							X		X							X			

## Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 23 E-, 24 C- och 20 A-poäng. Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla fyra delprov.

Kravgräns för provbetyget

E: 18 poäng

D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå

C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå

B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå

A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå



## Bedömningsanvisningar

*Exempel* på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

### Del B

**1.** **Max 2/0/0**

a) Korrekt svar ( $f'(x) = 2 \cos 2x$ ) +1 E<sub>P</sub>

b) Korrekt svar ( $g'(x) = 20(4x + 1)^4$ ) +1 E<sub>P</sub>

**2.** **Max 2/0/0**

a) Korrekt svar ( $2 - i$ ) +1 E<sub>B</sub>

b) Korrekt svar ( $-1 + 5i$ ) +1 E<sub>P</sub>

**3.** **Max 1/0/0**

Korrekt svar ( $x = -2$ ) +1 E<sub>B</sub>

**4.** **Max 0/1/0**

Korrekt svar ( $a = 9$ ) +1 C<sub>B</sub>

**5.** **Max 0/1/1**

Anger minst ett av de korrekta intervallen, t ex  $0^\circ < \nu < 10^\circ$  +1 C<sub>B</sub>



med korrekt svar ( $0^\circ < \nu < 10^\circ$  och  $50^\circ < \nu < 90^\circ$ ) +1 A<sub>B</sub>

*Kommentar:* Även svaren  $\nu < 10^\circ$  och  $\nu > 50^\circ$  anses godtagbara då intervallet  $0^\circ < \nu < 90^\circ$  är givet.

**6.** **Max 0/0/1**

Korrekt svar (t ex  $f(x) = 3 + 4 \sin x$ ) +1 A<sub>B</sub>

**Del C**

- 7.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t ex beräknar integralen till  $\ln e - \ln 1$  +1 E<sub>P</sub>  
 med i övrigt godtagbart resonemang (t ex ”Ja, svaret blir 1. Kerstin har rätt.”) +1 E<sub>R</sub>
- 8.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t ex anger att  $z_2 = \frac{(7+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$  +1 E<sub>PL</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $z_2 = 2 + i$ ) +1 E<sub>PL</sub>
- 9.** **Max 2/2/0**
- a) Godtagbar ansats, t ex förenklar VL till  $\sin^2 x + \cos^2 x$  +1 E<sub>R</sub>  
 med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 E<sub>R</sub>
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
- b) Godtagbar ansats, använder additionssatsen korrekt +1 C<sub>R</sub>  
 med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 C<sub>R</sub>
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
- 10.** **Max 1/1/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer minst en lösning till ekvationen +1 E<sub>P</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $x = \pm 15^\circ + n \cdot 180^\circ$ ) +1 C<sub>P</sub>

- 11.** **Max 1/3/2**
- a) Anger den vågräta *eller* lodräta asymptoten +1 E<sub>B</sub>  
med korrekt svar ( $x = 3$  och  $y = 1$ ) +1 C<sub>B</sub>
- b) Godtagbar skissning av grafen där båda asymptoterna ingår +1 C<sub>P</sub>  
med korrekt inritade asymptoter och en graf som tydligt närmar sig asymptoterna +1 C<sub>K</sub>

*Kommentar:* Med godtagbar skissning av grafen menas att grafen, med sitt karakteristiska utseende, ligger på rätt sida om asymptoterna men behöver inte vara korrekt inritad punkt för punkt.

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



- c) Godtagbar ansats, bestämmer det ena delintervallet, t ex  $3 < x < 5$  +1 A<sub>PL</sub>  
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $2 < x < 3$  eller  $3 < x < 5$ ) +1 A<sub>B</sub>

*Kommentar:* En lösning med svaret  $2 < x < 5$  ges ansatspoängen för problemlösning på A-nivå.

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



- 12.** **Max 0/2/2**
- a) Godtagbar ansats, använder de Moivres formel korrekt +1 C<sub>P</sub>  
med i övrigt godtagbar lösning +1 C<sub>P</sub>
- b) Godtagbar ansats, bestämmer ytterligare minst ett värde på  $p$  med den givna egenskapen +1 A<sub>PL</sub>  
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $p = 10 + n \cdot 40$ ) +1 A<sub>PL</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



- 13.** **Max 0/3/2**
- a) Godtagbar ansats, t ex påbörjar en korrekt uppställd polynomdivision +1 C<sub>R</sub>  
 med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 C<sub>R</sub>
- b) Godtagbar ansats, bestämmer minst tre rötter +1 C<sub>P</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $z_1 = -2i$ ,  $z_2 = 2i$ ,  $z_3 = \sqrt[3]{2}$ ,  
 $z_4 = \sqrt[3]{2}(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$  och  $z_5 = \sqrt[3]{2}(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$ ) +1 A<sub>PL</sub>
- Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, minustecken, rottecken, index, parenteser, termer såsom polär form, koefficient samt hänvisning till de Moivres formel etc. +1 A<sub>K</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



- 14.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, bestämmer en korrekt primitiv funktion +1 A<sub>PL</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $\frac{11}{4}$ ) +1 A<sub>PL</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



- 15.** **Max 0/0/3**
- Godtagbar ansats, t ex anger att felet beror på att Lasse inte tar hänsyn till att det finns ett  $x$ -värde där funktionen inte är definierad +1 A<sub>R</sub>  
 med i övrigt godtagbart slutfört resonemang med godtagbar slutsats (t ex ”Nej, den har inget största värde.”) +1 A<sub>R</sub>
- Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken,  $f(x)$ ,  $f'(x)$ , parenteser, lim, tydlig skiss, termer såsom nollställe, derivata, största värde, definierad, graf, asymptot,  $x$ -axel etc. +1 A<sub>K</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



**Del D****16.** **Max 2/0/0**Godtagbar ansats, t ex bestämmer  $\arg(z)$  +1 E<sub>B</sub>med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ( $2,8(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ ) +1 E<sub>B</sub>**17.** **Max 2/0/0**Godtagbar ansats, korrekt tecknad integral,  $\int_0^9 (0,5x + \sin 2x + 3)dx$  +1 E<sub>M</sub>med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ( $47 \text{ km}^2$ ) +1 E<sub>M</sub>*Kommentar:* Om grader använts i stället för radianer fås det ej godtagbara svaret  $49 \text{ km}^2$ .**18.** **Max 2/0/0**a) Godtagbar lösning med godtagbart svar ( $x \approx 5,97$ ) +1 E<sub>P</sub>b) Godtagbar lösning med korrekt svar (7) +1 E<sub>P</sub>**19.** **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, bestämmer övre integrationsgränsen eller tecknar

integralen  $\pi \int_0^a (4 - e^x)^2 dx$  +1 C<sub>P</sub>med godtagbar fortsättning, tecknar ett uttryck för volymen,  $\pi \int_0^{1,386} (4 - e^x)^2 dx$  +1 C<sub>P</sub>med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (17,8) +1 C<sub>P</sub>

- 20.** **Max 1/3/0**
- a) Godtagbar lösning +1 E<sub>p</sub>
- b) Godtagbar ansats, t ex tecknar en korrekt ekvation för bestämning av tiden,  
 t ex  $\int_0^x (2 - 2 \cdot e^{-5t}) dt = 8$  +1 C<sub>M</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (4,2 s) +1 C<sub>M</sub>
- Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, VL, HL,  $v'(t)$ ,  $v(t)$ , integraltecken, parenteser, termer såsom differentialekvation, integral, integrationsgräns, primitiv funktion etc. +1 C<sub>K</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



- 21.** **Max 0/4/0**
- a) Godtagbar ansats, t ex ställer upp en integral för bestämning av sannolikheten att väntetiden är högst 10 minuter +1 C<sub>M</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,81) +1 C<sub>M</sub>
- b) Godtagbar ansats, t ex ställer upp en korrekt ekvation för bestämning av  $x$  +1 C<sub>PL</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ( $x \approx 4,2$ ) +1 C<sub>PL</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



- 22.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, t ex anger att  $r'(2) = p(2) \cdot q'(2) + p'(2) \cdot q(2)$  +1 A<sub>B</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ( $r'(2) = -3$ ) +1 A<sub>PL</sub>

- 23.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, bestämmer en av konstanterna med godtagbar motivering +1 A<sub>PL</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $A = 3, B = -2$ ) +1 A<sub>PL</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



**Bedömda elevlösningar****Uppgift 9a****Elevlösning 1 (1 E<sub>R</sub>)**

$$a) \quad \cos^2 x \left( \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 \right) = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x \left( \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 \right) = \sin^2 x + \cos^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1$$

*Kommentar:* Elevlösningen bygger från och med tredje raden på likheten som ska visas. Lösningen bedöms därmed inte uppfylla kravet för den andra resonemangspoängen på E-nivå.

## Uppgift 9b

## Elevlösning 1 (1 CR)

$$H. \quad \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$$

$$\begin{aligned} V.L.: \quad \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \sqrt{2} \cos x \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \frac{\cos x \sqrt{2} - \sin x \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2} \cos x \sqrt{2} - \sin x \sqrt{2}}{2} = \cos x - \sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x \sqrt{2} - \sin x \sqrt{2}}{2} = \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}$$

Man kan skriva om:

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \cdot 1 \right\}$$

$$\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}} = \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}$$

*Kommentar:* Elevlösningen anses behandla additionssatsen korrekt även om parenteser saknas på rad två och tre. Elevlösningen bygger på likheten som ska visas från och med fjärde raden. Lösningen bedöms därmed inte uppfylla kravet för den andra resonemangspoängen på C-nivå.

## Elevlösning 2 (2 CR)

$$\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$$

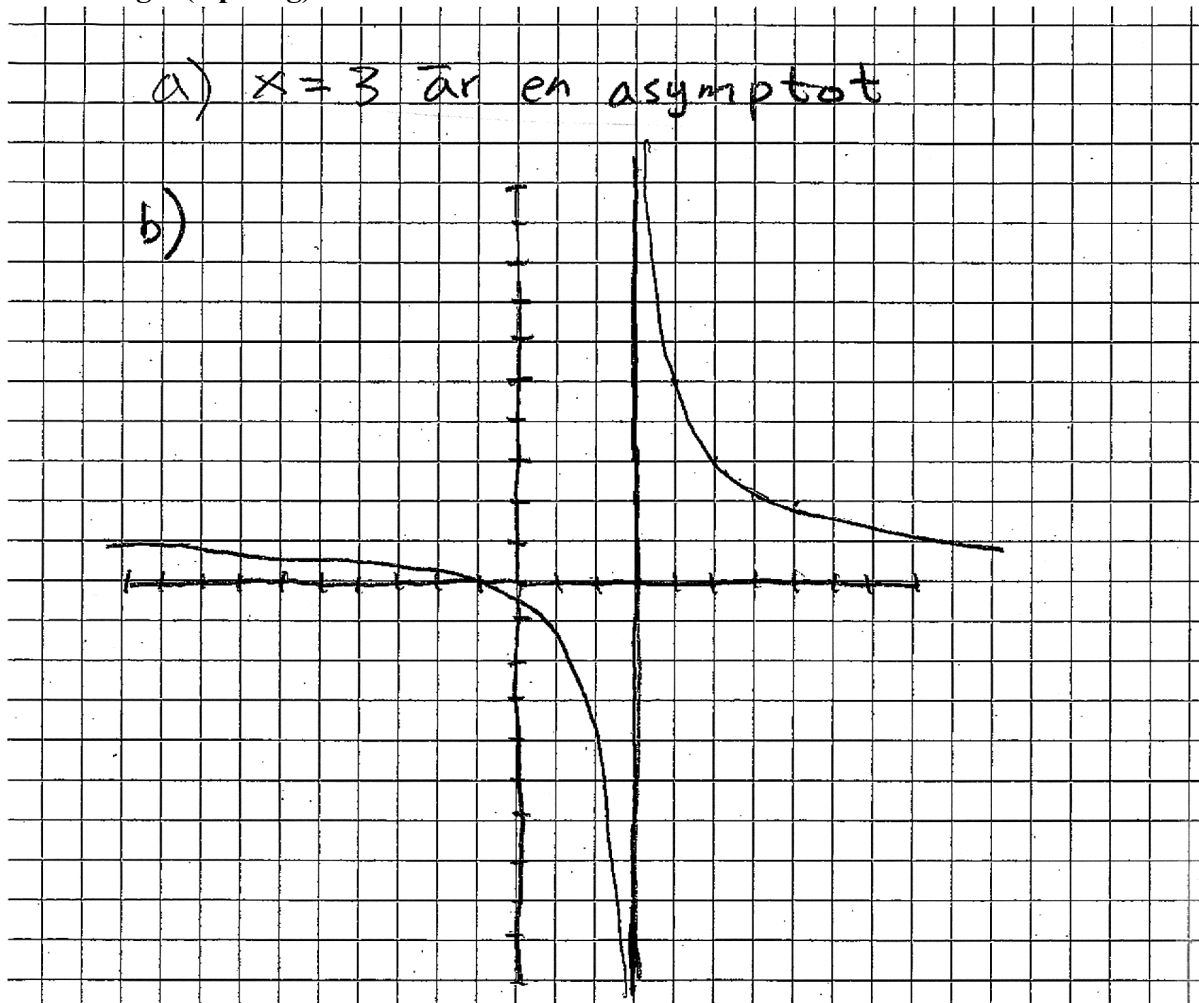
$$\begin{aligned} V.L. = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \\ &= \cos x - \sin x = H.L. \end{aligned}$$

*Kommentar:* Lösningen visar en korrekt metod för bevisföring. Trots att förenklingen i sista steget är något otydlig så ges lösningen båda resonemangspoängen på C-nivå.



## Uppgift 11b

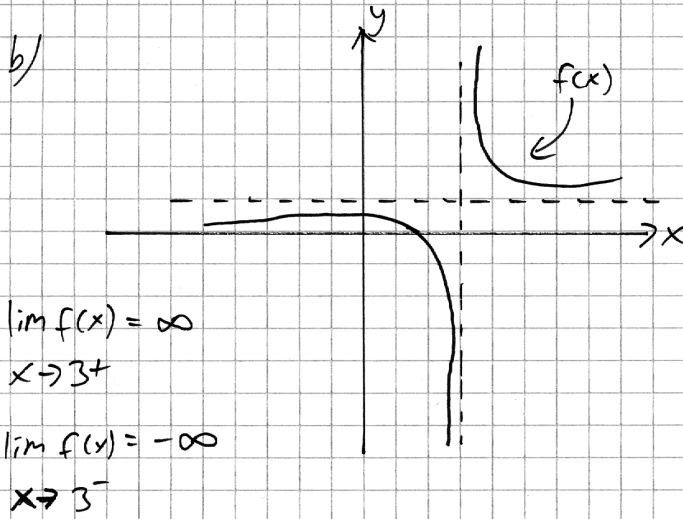
## Elevlösning 1 (0 poäng)



*Kommentar:* Elevlösningen visar på en skiss där den horisontella asymptoten saknas. Därmed uppfylls inte kravet för ansatspoängen gällande procedur på C-nivå.

**Elevlösning 2 (1 Cp)**

- a) Vertikal asymptot  $x=3$   
 Horisontell asymptot  $y=1$

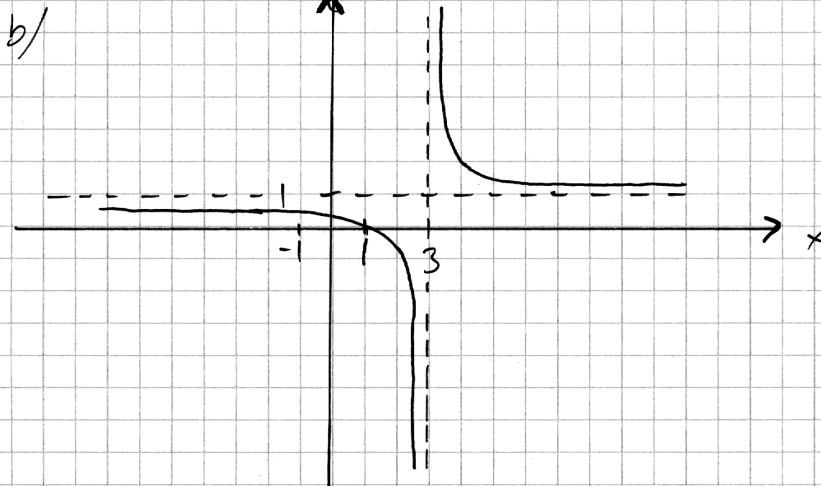


*Kommentar:* Elevlösningen visar en godtagbar skiss över kurvans karakteristiska utseende. Asymptoterna är inritade men kurvan närmar sig inte dessa. Sammantaget ges lösningen till b)-uppgiften en procedurpoäng på C-nivå.

**Elevlösning 3 (1 Cp och 1 Ck)**

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

- a)  $x=3, y=1$



*Kommentar:* Elevlösningen visar en godtagbar skiss där asymptoterna är inritade. Även om inte grafen tydligt närmar sig asymptoterna så bedöms skissen vara godtagbar. Sammantaget ges lösningen till b)-uppgiften en procedurpoäng på C-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

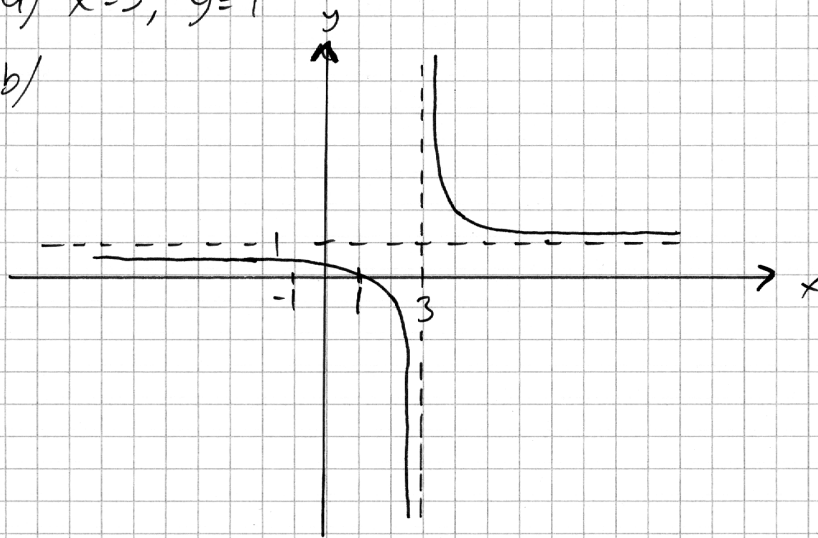
## Uppgift 11c

Elevlösning 1 (1 A<sub>PL</sub>)

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

a)  $x=3, y=1$

b/



c)  $|f(x)| > 3$      $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$      $\left| \frac{x+1}{x-3} \right| > 3$

$$x=1 \Rightarrow \frac{1+1}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$x=2 \Rightarrow \frac{2+1}{2-3} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$x=4 \Rightarrow \frac{4+1}{4-3} = \frac{5}{1} = 5$$

$$x=5 \Rightarrow \frac{5+1}{5-3} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x=6 \Rightarrow \frac{6+1}{6-3} = \frac{7}{3}$$

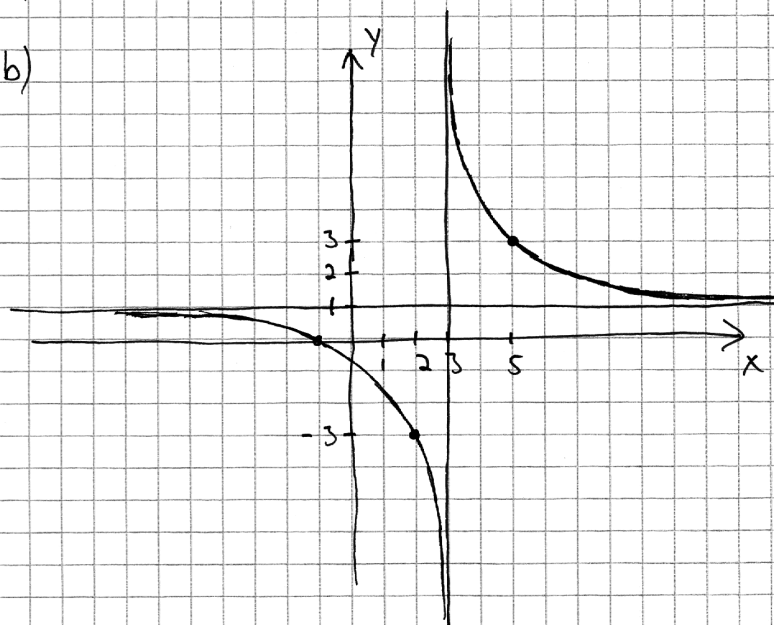
svår:  $2 < x < 5$

*Kommentar:* Elevlösningen visar hur ett antal funktionsvärden beräknats. Tillsammans med den schematiska skissen i b)-uppgiften anses lösningen nätt och jämnt vara godtagbar trots att en motivering eller hänvisning till skiss saknas. Sammantaget ges lösningen till c)-uppgiften en problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 A<sub>PL</sub> och 1 A<sub>B</sub>)

a)  $x = 3$     $y = 1$

b)



c)  $|f(x)| > 3$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

$$\left| \frac{x+1}{x-3} \right| > 3$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 2 \Rightarrow |f(x)| > 3 \\ x < 5 \Rightarrow |f(x)| > 3 \end{array} \right\} 2 < x < 5 \quad x \neq 3 \Rightarrow |f(x)| > 3$$

Svar c:  $2 < x < 5 \quad x \neq 3 \Rightarrow |f(x)| > 3$

*Kommentar:* Elevlösningen visar på en godtagbar lösning där två punkter tydligt och korrekt markerats i grafen i b)-uppgiften. En hänvisning till grafen saknas men anses vara underförstådd då punkterna är så tydligt markerade. Sammantaget ges lösningen till c)-uppgiften en problemlösningspoäng och en begreppsöäng på A-nivå.

## Uppgift 12b

Elevlösning 1 (2 A<sub>PL</sub>)

$$z_1^p = 1^p \cdot (\cos(9^\circ \cdot p) + i \sin(9^\circ \cdot p)) = i = z^p$$

$$1^p \cdot (\cos(9^\circ \cdot p) + i \sin(9^\circ \cdot p)) = 1 \cdot (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

$$9^\circ \cdot p = 90^\circ$$

$$p = 10 + \frac{360}{9} \cdot n = 10 + 40n$$

$$p = 10 + 40n \text{ då } z_1 \text{ är en lösning till } z^p = i$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar en godtagbar lösning av problemet trots att vissa förklaringar saknas, bland annat motivering av perioden. Sammantaget ges lösningen nätt och jämnt två problemlösningspoäng på A-nivå.

## Uppgift 13

Elevlösning 1 (2 C<sub>R</sub> och 1 C<sub>P</sub>)

a:

$$\begin{array}{r} z^3 - 2 \\ \overline{z^5 + 0z^4 + 4z^3 - 2z^2 + 0z - 8} \quad z^2 + 4 \\ -(z^5 + 4z^3) \\ \hline -2z^2 + 0z - 8 \\ -(-2z^2 - 8) \\ \hline 00 \end{array}$$

↙ faktor

Svar:  $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = (z^2 + 4)(z^3 - 2)$

b:  $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = 0$

lösning 1:  $(z^2 + 4) = 0 \quad z^2 = -4$   
 $z_1 = \pm \sqrt{-4} = \pm 2i$

lösning 2:  
 $(z^3 - 2) = 0 \quad z = \pm \sqrt[3]{2}$

Svar:  $z_1 = 2i, z_2 = -2i, z_{3-5} = ?$

*Kommentar:* Elevlösningen visar i a)-uppgiften en polynomdivision som utmynnar i att  $z^2 + 4$  är en faktor. I b)-uppgiften bestäms fyra lösningar varav tre korrekta. Sammantaget ges lösningen två resonemangspoäng på C-nivå i a)-uppgiften samt, på grund av den felaktiga lösningen  $-\sqrt[3]{2}$ , nätt och jämnt en procedurpoäng på C-nivå i b)-uppgiften.

## Elevlösning 2 (2 CR, 1 CP, 1 APL och 1 AK)

$$a) P(z) = z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8$$

$$\begin{array}{r} z^3 - 2 \\ z^2 + 4 \overline{) z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8} \\ \underline{-(z^5 + 4z^3)} \phantom{- 8} \\ 0 - 2z^2 - 8 \\ \underline{-(-2z^2 - 8)} \\ 0 \end{array}$$

Resten = 0  $\rightarrow z^2 + 4$  är en faktor i polynomet.

$$b) z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = (z^2 + 4)(z^3 - 2)$$

$$(z^2 + 4)(z^3 - 2) = 0$$

$$z^2 + 4 = 0$$

$$z^2 = -4$$

$$z = \pm 2i$$

$$z^3 - 2 = 0$$

$$z^3 = 2$$

$$z^3 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$z = r(\cos v + i \sin v)$$

$$r^3 = 2$$

$$3v = 0 + n \cdot 2\pi$$

$$v = \frac{2\pi}{3} \cdot n$$

$$\text{Svar: } z_1 = 2i \quad z_2 = -2i \quad z_3 = 2^{1/3}$$

$$z_4 = 2^{1/3} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \quad z_5 = 2^{1/3} \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar i a)-uppgiften en polynomdivision och en motivering av att  $z^2 + 4$  är en faktor. I b)-uppgiften bestäms samtliga lösningar till ekvationen. Lösningen är väl motiverad i a)-uppgiften, i b)-uppgiften saknas bland annat hänvisning till de Moivres formel. Lösningen är trots detta lätt att följa och förstå och anses därmed nätt och jämnt uppfylla kravet för kommunikationspoäng. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng inklusive kommunikationspoäng på A-nivå.

## Uppgift 14

## Elevlösning 1 (2 APL)

$$\int_0^{\pi/6} (2\sin x + 5) \cos x \, dx$$

$$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x + 5\cos x$$

$$f(x) = (\sin x)^2 + 5\sin x + C$$

$$\left[ (\sin x)^2 + 5\sin x \right]_0^{\pi/6} \quad (\sin 0 = 0)$$

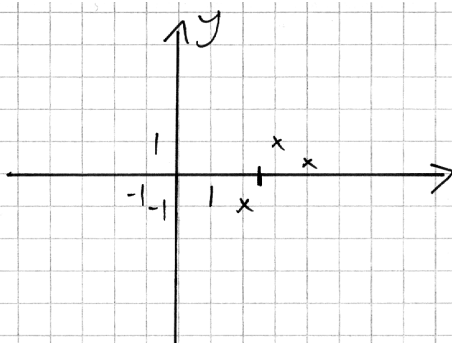
$$= \left( \sin \frac{\pi}{6} \right)^2 + 5 \sin \frac{\pi}{6} = \left( \frac{1}{2} \right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar en korrekt primitiv funktion med ett korrekt svar.

Motivering av hur den primitiva funktionen tagits fram saknas men lösningen anses ändå vara godtagbar. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på A-nivå.

## Uppgift 15

## Elevlösning 1 (1 AR)



Akt  $f'(x) < 0$  innebär att funktionen aldrig är stigande. Men om den har en asymptot (då  $x=2,5$ ) kan den alltid vara avtagande och ändå ha ett större  $y$ -värde då  $x$ -värdet ökar.

*Kommentar:* I elevlösningen konstateras att funktionen har en asymptot och skissen visar två funktionsvärden (då  $x=3$  och då  $x=4$ ) som är större än  $-\frac{1}{5}$ . Detta anses vara jämförbart med en godtagbar ansats. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på A-nivå.

## Elevlösning 2 (2 AR och 1 AK)

Lesse har glömt att funktionen har en asymptot vid  $x=2,5$  (då är nämnaren = 0) och om  $x \rightarrow 2,5$  från  $x > 2,5$  kommer  $f(x)$  att gå mot ett oändligt stort tal.

Därför antar inte heller funktionen något egentligt största värde vid  $x \geq 0$ , eftersom  $f(x) \rightarrow \infty$  när  $x \rightarrow 2,5$  från  $x > 2,5$  är det inget definierat största värde vid  $x=2,5$ .

*Kommentar:* Elevlösningen är korrekt med godtagbar motivering. Lösningen är lätt att följa och förstå trots att en förklarande skiss saknas. Kraven för kommunikationspoäng på A-nivå uppfylls därmed nätt och jämnt.



## Uppgift 20

Elevlösning 1 (1 E<sub>P</sub> och 2 C<sub>M</sub>)

$$\frac{dV}{dt} + 5V = 10 \quad \rightarrow \quad V' + 5V = 10$$

$$a) \quad v(t) = 2 - 2e^{-5t}$$

$$v'(t) = 0 + 10e^{-5t}$$

$$0 + 10e^{-5t} + 5(2 - 2e^{-5t})$$

$$10e^{-5t} + 10 - 10e^{-5t} = 10$$

$$b) \quad 2 - 2e^{-5t}$$

$$F(x) = 0,4 e^{-5x}$$

$$F(8) - F(x)$$

$$\int_0^x 2 - 2e^{-5t} = 8$$

$$\left[ 2t + 0,4e^{-5t} \right]_0^x$$

$$F(x) = 2x + 0,4e^{-5x} - 0,4 = Y_1$$

$$F(x) = 8 = Y_2$$

$$x = 4,2$$

$$\underline{\text{Svar}} \quad 4,2 \text{ sek.}$$

} Rita  $Y_1$  och  $Y_2$  på räknaren.  
Hittar skärningspunkten med "intersect".

*Kommentar:* Elevlösningen visar på godtagbara lösningar av båda deluppgifterna. Vad gäller kommunikation så saknas t ex uttryck som VL och HL i a)-uppgiften och b)-uppgiften är ostrukturerad och relativt svår att följa. Därmed uppfylls inte kravet för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen en procedurpoäng på E-nivå i a)-uppgiften samt två modelleringspoäng på C-nivå i b)-uppgiften.

Elevlösning 2 (1 E<sub>P</sub>, 1 C<sub>M</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

$$a) \frac{dv}{dt} + 5v = 10$$

$$v' + 5v = 10$$

$$v(t) = 2 - 2e^{-5t}$$

$$v'(t) = -2e^{-5t} \cdot (-5) = 10e^{-5t}$$

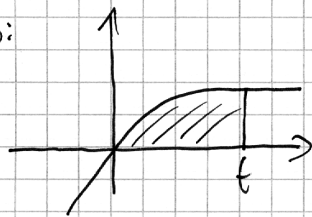
$$v' + 5v = 10$$

$$\begin{aligned} \text{V.L.} &= 10e^{-5t} + 5(2 - 2e^{-5t}) = 10e^{-5t} + 10 - 10e^{-5t} = \\ &= 10 = \text{H.L.} \end{aligned}$$

Svar:  $v(t) = 2 - 2e^{-5t}$  är alltså en lösning till differentialekvationen

$$b) v = 2 - 2e^{-5t}$$

Skiss:



Arean under grafen är sträckan

När arean under grafen är 8 har fågeln nått marken.

$$\int_0^x (2 - 2e^{-5t}) dt = 8 \Rightarrow \left[ 2t + 0,4e^{-5t} \right]_0^x = 8$$

$$2x^2 + 0,4e^{-5x} = 8 \Rightarrow x = 2 \text{ sek.}$$

Svar: Fågeln når marken efter 2 sekunder.

*Kommentar:* Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet och trots att lösningen innehåller en felaktighet i b)-uppgiftens näst sista rad så bedöms lösningen vara tillräckligt korrekt för att kunna ges kommunikationspoäng. Lösningen kommuniceras med t ex  $v(t)$ ,  $v'(t)$ , VL, HL, en skiss med förklarande text och en förklaring "När arean under grafen är 8 har fågeln nått marken.". Sammantaget ges lösningen en procedurpoäng på E-nivå i a)-uppgiften och den första modelleringspoängen på C-nivå samt en kommunikationspoäng på C-nivå i b)-uppgiften.

## Uppgift 21

Elevlösning 1 (2 C<sub>M</sub> och 2 C<sub>PL</sub>)

a) Skriv in funktionen på grafritaren.  
 Välj  $\int f(x) dx$  och ange lower limit 0 och  
 upper limit 10.  
 svar:  $P = 0,81$

b) Testade mig fram på räknaren med lower limit 0

Upper limit	Sannolikheten att få hjälp inom $x$ min
5	0,57
4	0,49
4,5	0,53
4,3	0,51
4,1	0,495
4,2	0,503

$x = 4,2$  min. Dock är det troligt att man skulle  
 välja att avrunda till hela minuter.

*Kommentar:* Elevlösningen visar på en godtagbar lösning. Redovisningen om hur det digitala hjälpmedlet använts är tydlig i a)-uppgiften och i b)-uppgiften anses redovisningen vara implicit förklarad av a)-uppgiften. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng för båda deluppgifterna.

## Uppgift 21b

## Elevlösning 1 (1 CPL)

$$b) \int_0^x \left( \frac{1}{6} e^{-x/6} \right) dx = 0,5$$

Genom att testa sig fram på räknaren  
kom jag fram till ett närmevärde på  
4,2 min.

*Kommentar:* Elevlösningen visar en korrekt uppställd ekvation för bestämning av tiden. Förklaring till hur det digitala hjälpmedlet använts saknas, därmed anses inte lösningen vara godtagbar. Sammantaget ges lösningen av b)-uppgiften en problemlösningspoäng på C-nivå.

## Uppgift 23

Elevlösning 1 (1 A<sub>PL</sub>)

$$A \sin x - \sin x + B$$

$$A = 1 - (-2) = 3$$

B: Eftersom  $\sin^2 x + 0$  kurvan har sin min-punkt på x-axeln, kommer B-värdet vara avståndet mellan funktionens min-punkt och x-axeln. I det här fallet blir  $B = -2$ .

$$A = 3$$

$$B = -2$$

*Kommentar:* Lösningen visar en bestämning av konstanten  $B$  med godtagbar motivering. Motivering till varför konstanten  $A = 3$  saknas. Sammantaget ges lösningen den första problemlösningspoängen på A-nivå.

Elevlösning 2 (2 A<sub>PL</sub>)

$$y(x) = A \sin^2 x + B$$

$$y(0) = 0 + B = -2 \quad \leftarrow \text{kollar det grafiskt i grafen på provpappret}$$

$$\Rightarrow B = -2$$

Termen  $A \sin^2 x$  kommer alltid att vara positiv i och med kvadrattermen. När  $x = \frac{\pi}{2}$  eller  $\frac{3\pi}{2}$  kommer  $\sin^2 x$  att ha sitt högsta värde:  $\sin^2 \frac{\pi}{2} + n\pi = 1 \Rightarrow$

$$A \cdot 1 - 2 = 1 \quad \leftarrow \text{(det högsta värdet kurvan antar är 1, det är grafiskt verifierbart, se provpappret)}$$

$$A - 2 = 1$$

$$A = 3$$

$$\text{SVAR: } A = 3 \text{ och } B = -2$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar en godtagbar bestämning av de båda konstanterna. Konstanternas värde motiveras väl trots det felaktiga påståendet "Termen  $A \sin^2 x$  kommer alltid att vara positiv". Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på A-nivå.

## Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

### Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnena.

### Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhällligt och historiskt sammanhang.

## Kunskapskrav Matematik kurs 4

**Betyget E** Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen i **bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

**Betyget D** Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

**Betyget C** Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade** matematiska resonemang och värdera med **nyanserade** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

**Betyget B** Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

**Betyget A** Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja, tillämpa och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

## Centralt innehåll Matematik kurs 4

*Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:*

### Aritmetik, algebra och geometri

- A6** Metoder för beräkningar med komplexa tal skrivna på olika former inklusive rektangulär och polär form.
- A7** Komplexa talplanet, representation av komplext tal som punkt och vektor.
- A8** Konjugat och absolutbelopp av ett komplext tal.
- A9** Användning och bevis av de Moivres formel.
- A10** Algebraiska och grafiska metoder för att lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter och reella polynomekvationer av högre grad, även med hjälp av faktorsatsen.
- A11** Hantering av trigonometriska uttryck samt bevis och användning av trigonometriska formler inklusive trigonometriska ettan och additionsformler.
- A12** Algebraiska och grafiska metoder för att lösa trigonometriska ekvationer.
- A13** Olika bevismetoder inom matematiken med exempel från områdena aritmetik, algebra eller geometri.

### Samband och förändring

- F17** Egenskaper hos trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner och absolutbeloppet som funktion.
- F18** Skissning av grafer och tillhörande asymptoter.
- F19** Härledning och användning av deriveringsregler för trigonometriska, logaritm-, exponential- och sammansatta funktioner samt produkt och kvot av funktioner.
- F20** Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av integraler med och utan digitala verktyg, inklusive beräkningar av storheter och sannolikhetsfördelning.
- F21** Begreppet differentialekvation och dess egenskaper i enkla tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnen.

### Problemlösning

- P1** Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
- P3** Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
- P4** Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.



# Bedömningsformulär

Elev: \_\_\_\_\_ Klass: \_\_\_\_\_ Provbetyg: \_\_\_\_\_

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del A	M_1												
	M_2												
	M_3												
	M_4												
	M_5												
	M_6												
	M_7												
Del B	1a												
	1b												
	2a												
	2b												
	3												
	4												
	5_1												
	5_2												
	6												
Del C	7_1												
	7_2												
	8_1												
	8_2												
	9a_1												
	9a_2												
	9b_1												
	9b_2												
	10_1												
	10_2												
	11a_1												
	11a_2												
	11b_1												
	11b_2												
	11c_1												
	11c_2												
	12a_1												
12a_2													
12b_1													
12b_2													

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del C	13a_1												
	13a_2												
	13b_1												
	13b_2												
	13b_3												
	14_1												
	14_2												
	15_1												
	15_2												
	15_3												
	16_1												
	16_2												
	17_1												
	17_2												
	Del D	18a											
18b													
19_1													
19_2													
19_3													
20a													
20b_1													
20b_2													
20b_3													
21a_1													
21a_2													
21b_1													
21b_2													
22_1													
22_2													
23_1													
23_2													
<b>Total</b>													
<b>Σ</b>													

	<b>Total</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>8</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>9</b>	<b>7</b>
<b>Σ</b>	<b>67</b>	<b>23</b>				<b>24</b>				<b>20</b>			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation