

## Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 65 poäng varav 23 E-, 23 C- och 19 A-poäng. Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla fyra delprov, det vill säga Delprov A, B, C och D.

Kravgräns för provbetyget

E: 17 poäng

D: 26 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå

C: 34 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå


B: 44 poäng varav 6 poäng på A-nivå

A: 53 poäng varav 11 poäng på A-nivå

## Bedömningsanvisningar

*Exempel* på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

### Delprov B

- |   |   |
|---|---|
| <b>1.</b>   | <b>Max 1/0/0</b>  |
| Korrekt svar (-4)   | +1 E <sub>B</sub>   |
| <br>  |   |
| <b>2.</b>   | <b>Max 1/0/0</b>  |
| Korrekt svar $\left(\frac{8}{3}\right)$                     | +1 E <sub>P</sub>   |
| <br>  |   |
| <b>3.</b>   | <b>Max 2/0/0</b>  |
| a) Godtagbart ritad tangent                                 | +1 E <sub>B</sub>   |
| b) Godtagbart ritad sekant som skär grafen i två punkter    | +1 E <sub>B</sub>   |
| <br>  |   |
| <i>Se avsnittet Bedömda elevlösningar.</i>                  |  |
| <br>  |   |
| <b>4.</b>   | <b>Max 1/2/0</b>  |
| a) Korrekt svar ( $f'(x) = 15x^2 - 16x$ )                   | +1 E <sub>P</sub>   |
| b) Korrekt svar $\left(f'(x) = \frac{3 - e^{-x}}{2}\right)$ | +1 C <sub>P</sub>   |
| c) Korrekt svar ( $f'(x) = x^{-1,5}$ )                      | +1 C <sub>P</sub>   |
| <br>  |   |
| <b>5.</b>   | <b>Max 1/1/0</b>  |
| a) Korrekt svar (1,5)                                       | +1 E <sub>P</sub>   |
| b) Korrekt svar (-0,5)                                      | +1 C <sub>B</sub>   |

- 6.** **Max 1/0/0**  
Godtagbart ritad graf  
(Markering av punkterna (1, 1), (2, 4) och (3, 9)) +1 E<sub>B</sub>
- 7.** **Max 1/1/0**  
a) Korrekt svar (G) +1 E<sub>B</sub>  
b) Korrekt svar (H) +1 C<sub>B</sub>
- 8.** **Max 0/1/0**  
Korrekt svar (Alternativ E) +1 C<sub>B</sub>
- 9.** **Max 1/1/1**  
a) Korrekt svar (3) +1 E<sub>P</sub>  
b) Korrekt svar  $\left(\frac{x-3}{2(x+3)}\right)$  +1 C<sub>P</sub>  
c) Korrekt svar  $((x-1)^{12})$  +1 A<sub>P</sub>
- 10.** **Max 0/1/1**  
a) Korrekt svar (C) +1 C<sub>B</sub>  
b) Korrekt svar (B, D och E) +1 A<sub>B</sub>

**Delprov C****11. Max 2/0/0**

Godtagbar inledning till resonemang, t.ex. sätter  $x = 10$  och  $y = 6$  i cirkelns ekvation

+1 E<sub>R</sub>

med i övrigt godtagbart slutfört resonemang med slutsatsen att punkten inte ligger på cirkeln

+1 E<sub>R</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*

**12. Max 3/1/0**

Godtagbar ansats, deriverar och tecknar ekvationen  $3x^2 - 12x + 9 = 0$

+1 E<sub>P</sub>

med korrekt bestämning av derivatans nollställen,  $x_1 = 1$  och  $x_2 = 3$

+1 E<sub>P</sub>

med godtagbar verifiering, t.ex. verifiering av maximum då  $x_1 = 1$  och uteslutning av nollstället  $x_2 = 3$  med korrekt svar ( $x = 1$ )

+1 E<sub>P</sub>

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4

+1 C<sub>K</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*

**13. Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion,  $\frac{x^4}{16} + \frac{x}{4}$

+1 C<sub>P</sub>

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (1,5 a.e.)

+1 C<sub>P</sub>

*Kommentar:* Svar med utelämnad eller felaktig enhet godtas.

**14. Max 0/3/0**

Godtagbar generell ansats, där två relevanta areor beräknas, t.ex.

$$\int_0^a kx^2 dx = \frac{ka^3}{3} \text{ och } a \cdot ka^2 = ka^3$$

+1 C<sub>R</sub>

med godtagbart slutfört bevis

+1 C<sub>R</sub>

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4

+1 C<sub>K</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



- 15.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, skriver om nämnaren som  $(x-1)(x+3)$  och inser att en av faktorerna  $(x-1)$  eller  $(x+3)$  ska finnas i täljaren  $x^2 - ax - 12$  +1 A<sub>PL</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $a_1 = -11$  och  $a_2 = 1$ ) +1 A<sub>PL</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



- 16.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, t.ex. visar insikt om att  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h} = y'(0)$  +1 A<sub>B</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $\ln 3$ ) +1 A<sub>P</sub>

### Delprov D

- 17.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer ett allmänt uttryck för den primitiva funktionen,  $F(x) = 0,25x^4 + x^3 + C$  +1 E<sub>PL</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $F(x) = 0,25x^4 + x^3 - 5$ ) +1 E<sub>PL</sub>

- 18.** **Max 1/0/0**
- Godtagbart enkelt resonemang, där det framgår att  $|-12 + 2| + 0,5 \cdot (-12) = 4$ , med slutsatsen att Lisa har fel +1 E<sub>R</sub>

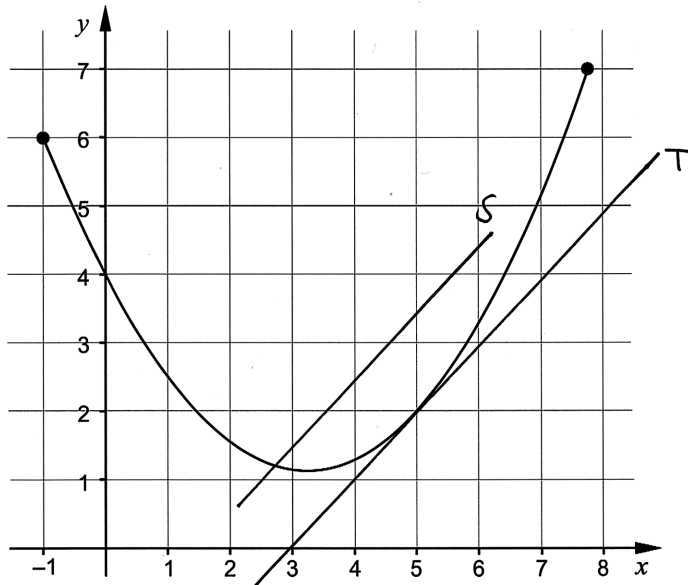
*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



## Bedömda elevlösningar

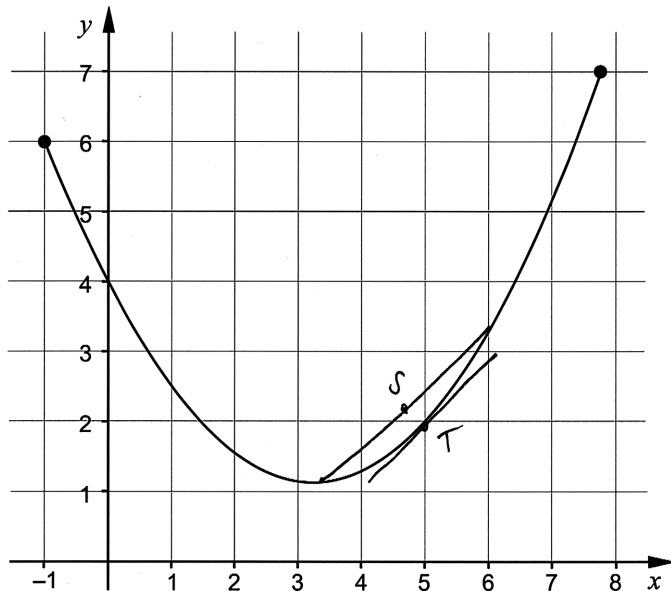
### Uppgift 3

#### Elevlösning 1 (1 E<sub>B</sub>)



*Kommentar:* a) Tangenten är godtagbart ritad, vilket ger en begreppspoäng på E-nivå.  
b) Sekanten uppfyller inte kraven för en begreppspoäng på E-nivå eftersom den inte skär grafen i två punkter.

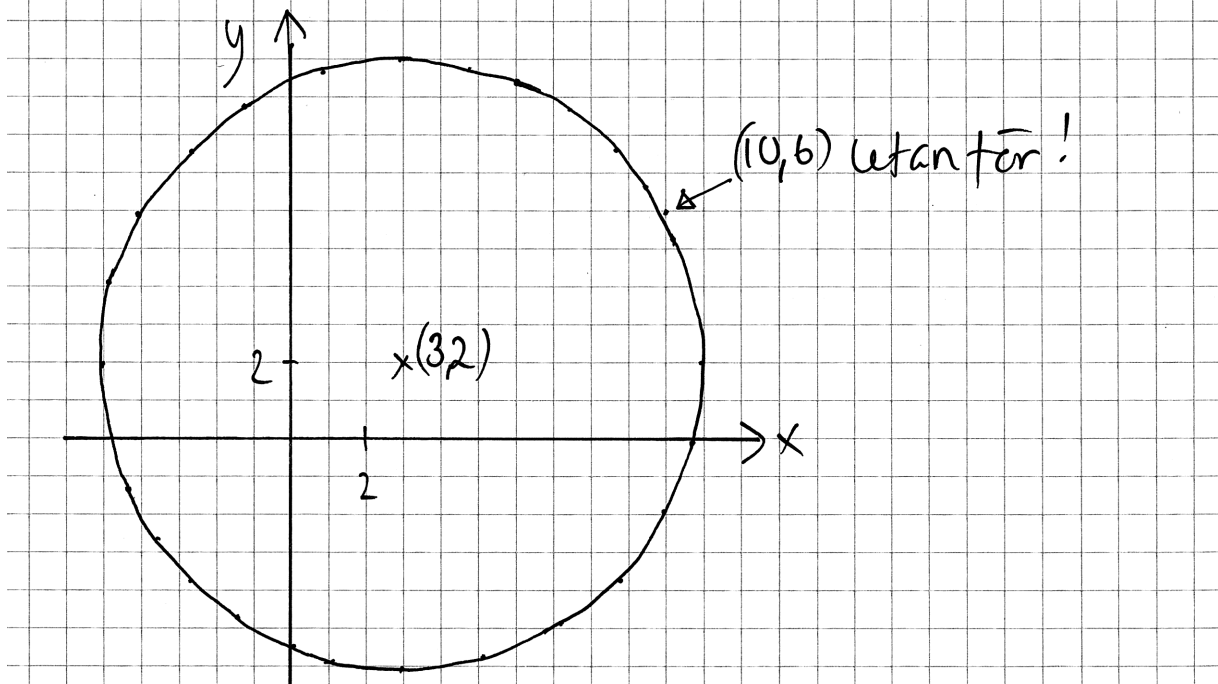
#### Elevlösning 2 (2 E<sub>B</sub>)



*Kommentar:* Tangenten och framförallt sekanten borde ha varit längre och lutningen är inte riktigt 1. Trots detta bedöms lösningen nätt och jämnt ge två begreppspoäng på E-nivå.

## Uppgift 11

## Elevlösning 1 (0 poäng)



*Kommentar:* Elevlösningen visar en noggrant ritad figur, men en figur anses inte vara tillräcklig för att avgöra om punkten ligger på cirkeln eller inte. Lösningen ges 0 poäng.

## Elevlösning 2 (1 ER)

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 64 \\ (10-3)^2 + (6-2)^2 &= 64 \\ (100-9) + (36-4) &= 64 \\ 91 + 32 &\neq 64 \end{aligned}$$

Nej, den ligger inte på cirkeln!

*Kommentar:* Lösningen visar en godtagbar ansats där  $x=10$  och  $y=6$  ansätts i ekvationen men sedan följer ett räknefel. Lösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

## Elevlösning 3 (2 ER)

$$\begin{aligned} (10-3)^2 + (6-2)^2 &= 64 \Rightarrow \\ 7^2 + 4^2 &= 64 \Rightarrow \\ 49 + 16 &= 65 \neq 64 \text{ Falskt} \\ \text{Nej, det gör den inte} \end{aligned}$$

*Kommentar:* Lösningen visar ett godtagbart enkelt resonemang trots formella brister. Sammantaget ges lösningen nätt och jämnt två resonemangspoäng på E-nivå.

## Uppgift 12

Elevlösning 1 (2 E<sub>P</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

$$V(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$V_{\max}$  finns där  $V'(x) = 0$

$$V'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{pq-formeln ger vidare att}$$

$$\Rightarrow x = -\left(-\frac{4}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3}$$

$$= 2 \pm \sqrt{1}$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 + 1 = 3 \text{ dm}$$

$$x_2 = 2 - 1 = 1 \text{ dm}$$

$x_1$  ger att sidan  $x = 3 \text{ dm}$  vilket är orimligt då detta är den kvadratiske plåtens sida.

Påvar finns  $V_{\max}$  i  $x = 1$ . Sidan ska vara 1 dm för att boet ska bli så stort som möjligt.

Svar: 1 dm

*Kommentar:* I elevlösningen motiveras varför  $x = 3 \text{ dm}$  är orimligt men verifiering av att  $x = 1 \text{ dm}$  motsvarar ett maximum saknas, vilket gör att kraven för tredje procedurpoängen på E-nivå inte är uppfyllda. När det gäller kommunikation är uppgiften i det närmaste behandlad i sin helhet och redovisningen är mycket lätt att följa och förstå samt symboler används med god anpassning till syfte och situation. Därmed anses kraven för kommunikationspoängen på C-nivå vara uppfyllda. Sammantaget ges elevlösningen två procedurpoäng på E-nivå och kommunikationspoängen på C-nivå.



Elevlösning 2 (3 E<sub>P</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

Sökes: Största möjliga volym

Givet: Sidan är 3 dm

$$V(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Lösning:  $V'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ 

$$V'(x) = 0 \text{ ger } 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$$

$$(x_1 = 3) \quad x_2 = 1$$

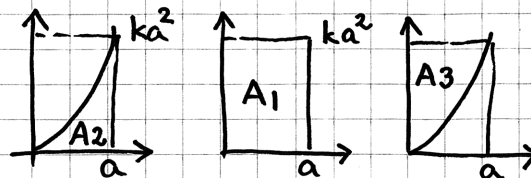
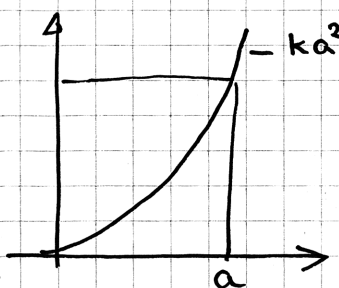
$$V''(x) = 6x - 12$$

$$V''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 \quad V(1) \text{ max}$$

Svar  $x = 1$ 

*Kommentar:* Uppgiften är löst i sin helhet inklusive uteslutning av  $x = 3$  och verifiering av maximum. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad och möjlig att följa och förstå trots att motiveringen till varför  $x = 1$  ger ett maximum är ofullständig. Elevlösningen ges tre procedurpoäng på E-nivå samt nått och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå

## Uppgift 14

Elevlösning 1 (1 C<sub>R</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

$$A_1 = a \cdot ka^2 = ka^3$$

$$A_2 = \int_0^a kx^2 dx = \left[ \frac{kx^3}{3} \right]_0^a = \frac{ka^3}{3}$$

Om  $A_2 + A_3$  ska vara lika med  $A_1$  så  
måste  $A_3 = \frac{2ka^3}{3}$

*Kommentar:* Relevanta areor beräknas korrekt men bevisföringen är inte helt slutförd eftersom en slutsats av typen "dvs  $A_3 = 2A_2$ " saknas. Även om beviset inte är helt fullständigt så är lösningen välstrukturerad och lätt att följa och förstå. Matematiska symboler används korrekt och figurerna förtydligar lösningen. Elevlösningen ges en resonemangs- och en kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C<sub>R</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

$$A_{vit} = \int_0^a (kx^2) dx = \left[ \frac{kx^3}{3} \right]_0^a = \frac{ka^3}{3}$$

$$y = ka^2$$

$$A_{rek} = a \cdot ka^2 = ka^3$$

$$A_{gr\ddot{a}} = ka^3 - \frac{ka^3}{3} = \frac{2ka^3}{3}$$

$$A_{gr\ddot{a}} = 2 \cdot A_{vit}$$

$$\frac{2ka^3}{3} = 2 \cdot \frac{ka^3}{3} \quad \text{v. s. b.}$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar ett godtagbart bevis. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå. Visserligen saknas figur men detta kompenseras av användningen av index. Elevlösningen ges två resonemangspoäng och en kommunikationspoäng på C-nivå.

## Uppgift 15

## Elevlösning 1 (0 poäng)

$$\frac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x^2 - ax - 12}{(x-1)(x+3)}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 3}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{och} \quad x_2 = -3$$

*Kommentar:* Nämnaren faktoriseras korrekt men det framgår inte att faktorerna även ska finnas i täljaren för att förkortning ska vara möjlig. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (1 A<sub>PL</sub>)

$$\frac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3}$$

Man kan inte använda några kvadreringsregler eftersom det är - framför 12 och 3.

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

För att det ska bli 12 måste man ha med 4 och 3 i parenteserna.

$$(x+3)(x-4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12$$

Detta gör att om  $a=1$  kan man förenkla uttrycket.

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x-4}{x-1} \quad \text{Svar: } a=1$$

*Kommentar:* I elevlösningen faktoriseras nämnaren och det ena värdet på  $a$  bestäms. Elevlösningen ges en problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 3 (2 A<sub>PL</sub>)

$$\frac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2 - 4x + 3x - 12}{x^2 - x + 3x - 3} = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3}$$

Förkortning möjlig

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$

svar  $a_1 = 1$   
 $a_2 = 11$

$$\frac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+12)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2 + 12x - x - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x^2 + 11x - 12}{x^2 + 2x - 3}$$

Förkortning möjlig

*Kommentar:* Elevlösningen är korrekt förutom ett lapsusfel i sista ledet. Elevlösningen ges två problemlösningspoäng på A-nivå.

## Uppgift 18

## Elevlösning 1 (0 poäng)

$$|x + 2| + 0.5x = 5$$

LISA HAR FEL.  $(-12 + 2) + (-6) = 5$

$$(-10) + (-6) = 5$$

$$10 - 6 = 4$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar ett resonemang som inte bedöms som godtagbart eftersom parentes används istället för absolutbeloppstecken på andra och tredje raden. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (1 E<sub>R</sub>)

$$|-12 + 2| + 0.5 \cdot (-12) = 5$$

$$|-10| + (-6) = 5$$

$$10 - 6 = 4 \neq 5 \quad \text{Hon har fel!!!}$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar ett resonemang som på de två första raderna inte är formellt korrekt eftersom  $VL \neq HL$ . Elevlösningen bedöms nätt och jämnt uppfylla kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösning 3 (1 E<sub>R</sub>)

Nej, eftersom  $|-12 + 2| = 10$  och

$$10 + 0.5 \cdot (-12) = 10 - 6 = 4$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar ett något kortfattat resonemang som nätt och jämnt bedöms uppfylla kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.