Part B	Problems 1-10 which only require answers.
Part C	Problems 11-16 which require complete solutions.
Test time	120 minutes for Part B and Part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 65 points consisting of 23 E-, 23 C- and 19 A-points.

Level requirements for test grades
E: 17 points
D: 26 points of which 8 points on at least C-level
C: 34 points of which 14 points on at least C-level
B: 44 points of which 6 points on A-level
A: 53 points of which 11 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem.
You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem.
For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled "*Only answer is required*" you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: ______________________________

Date of birth: ______________________________

Educational programme: ______________________________

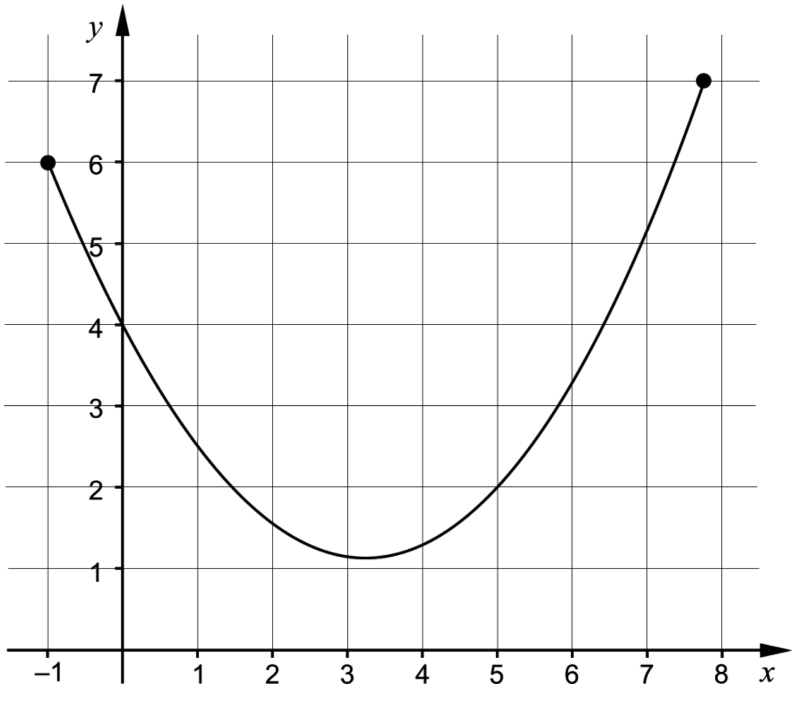
Part B: Digital resources are not allowed. *Only answer is required*. Write your answers in the test booklet.

1. For what value of x is the expression $\dfrac{2x}{x+4}$ not defined?

_______________________ (1/0/0)

2. Calculate the exact value of $\int_0^2 x^2 \mathrm{d}x$ _______________________ (1/0/0)

3. The figure shows the graph of a function that is defined on a closed interval.



In the figure, draw

a) a tangent with a gradient of 1. Label the tangent with the letter T. (1/0/0)

b) a secant line with a gradient of 1. Label the secant line with the letter S. (1/0/0)

4. Find $f'(x)$ if

a) $f(x)=5x^3-8x^2+10$ $\qquad f'(x)=$ ______________________ (1/0/0)

b) $f(x)=\dfrac{3x+e^{-x}}{2}$ $\qquad f'(x)=$ ______________________ (0/1/0)

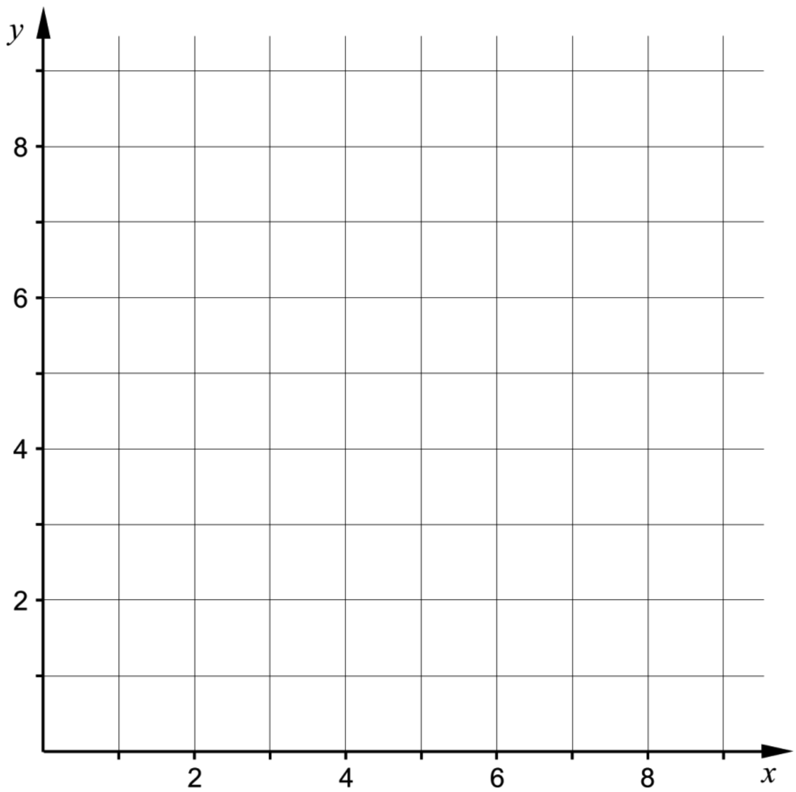
c) $f(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $\qquad f'(x)=$ ______________________ (0/1/0)

5. Find the exact value of

a) $\sin 90°+\sin 150°$ ______________________ (1/0/0)

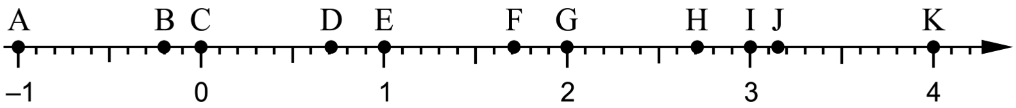
b) $\cos 240°$ ______________________ (0/1/0)

6. The function f is a *discrete* function.
It holds that $f(x)=x^2$ for $x=1,\ 2$ och 3
Draw the graph of the function f in the coordinate system.



(1/0/0)

7. The points A – K are marked on the number line.

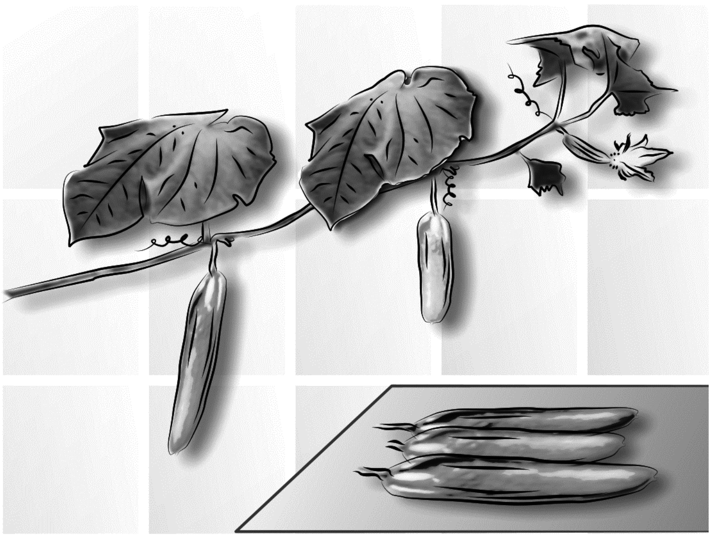


Determine which of the points A – K corresponds to the value of

a) $\ln e^2$ ______________________ (1/0/0)

b) $e - \ln 1$ ______________________ (0/1/0)

8. A cucumber farmer has investigated how the weight of a growing cucumber increases over time. She presents the result as a function $y = V(t)$, where $V(t)$ is the weight of the cucumber in hg and t is the time in weeks after the measuring was started.



What will she find out by calculating $V'(3)$?
Choose one of the alternatives A – E.

A. The weight of the cucumber in hg at the time 3 weeks.

B. The increase in weight of the cucumber in hg over 3 weeks.

C. The average increase in weight of the cucumber in hg/week over 3 weeks.

D. The time it takes for the weight of the cucumber to increase to 3 hg.

E. The increase in weight of the cucumber in hg/week at the time 3 weeks.

______________________ (0/1/0)

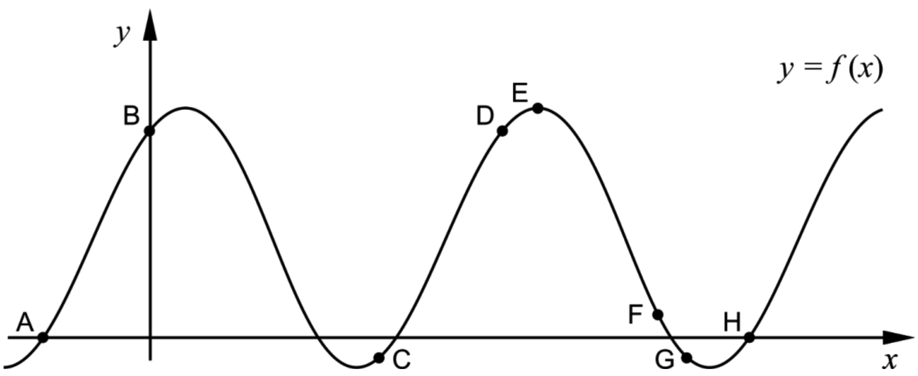
9. Simplify the expressions as far as possible.

a) $\dfrac{3x+15}{x+5}$ ______________________ (1/0/0)

b) $\dfrac{x^2-6x+9}{2x^2-18}$ ______________________ (0/1/0)

c) $\dfrac{(x-1)^{13}+(x-1)^{12}}{x}$ ______________________ (0/0/1)

10. The figure shows the graph of a function f. The points A – H are marked on the graph.



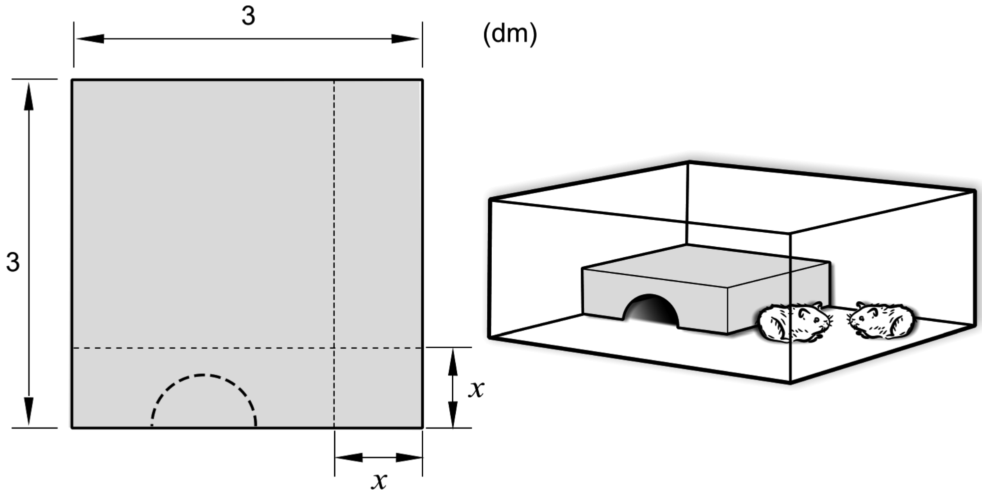
a) At one of the points A – H, $f'(x)>0$ and $f(x)<0$
Write down this point. ______________________ (0/1/0)

b) At several of the points A – H, $f''(x)<0$
Write down these points. ______________________ (0/0/1)

Part C: Digital resources are not allowed. Do your solutions on separate sheets of paper.

11. The equation of a circle is $(x-3)^2+(y-2)^2=64$
Investigate if the point $(10,6)$ lies on the circle. (2/0/0)

12. János has a square piece of sheet metal which he will use to build a house for his hamsters. He is going to cut out a square from one of the corners of the sheet metal and then fold the sheet metal into a house, see figure.

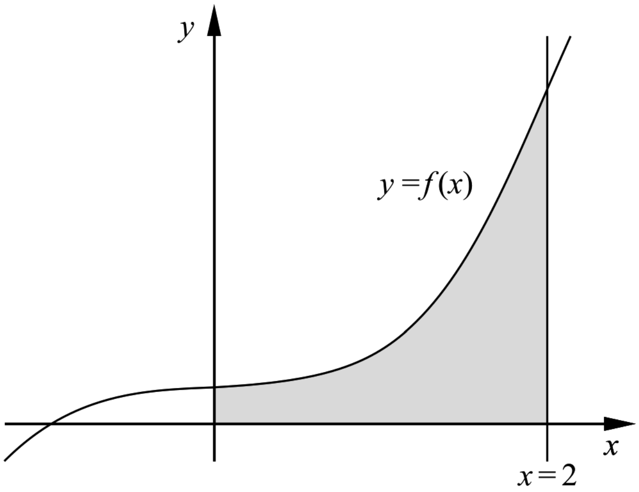


János assumes that the square has side x dm. He then determines the volume of the house V dm^3 as a function of the side x dm:

$V(x)=x^3-6x^2+9x$

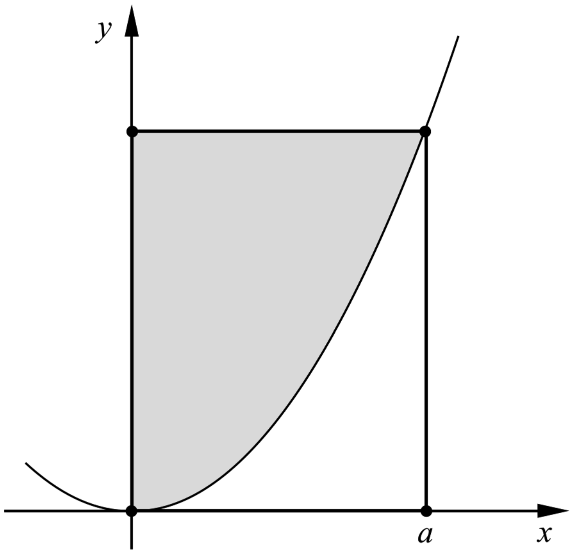
Use the derivative to calculate x so that the volume of the house becomes as large as possible. (3/1/0)

13. Calculate the area of the region bounded by the line $x = 2$, the graph of $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{4}$ and the positive coordinate axes. (0/2/0)



14. Archimedes was a Greek mathematician and philosopher who lived approximately 2300 years ago. He studied, among other things, parabolas.

The figure shows a parabola and a rectangle in a coordinate system. The rectangle has corners at the origin, on the parabola and at the positive coordinate axes. The parabola divides the rectangle into a grey region above the parabola and a white region below the parabola. See figure.



Archimedes claimed that the area of the grey region is twice the area of the white region.

Assume that the parabola is described by the function $y = kx^2$ where k is a positive constant and that the corner on the positive x-axis is at the point where $x = a$.

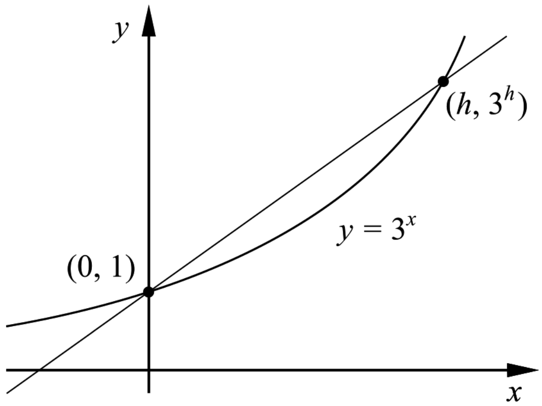
Prove that Archimedes' statement holds for all such parabolas. (0/3/0)

15. Determine all values of a so that it is possible to simplify the expression

$$\frac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3}$$

(0/0/2)

16. The figure shows the graph of $y = 3^x$ and a straight line that intersects the graph at the points $(0, 1)$ och $(h, 3^h)$.



Find $\lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h}$. Give an exact answer. (0/0/2)

Part D	Problems 17-24 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital resources, formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 65 consisting of 23 E-, 23 C- and 19 A-points.

Level requirements for test grades
E: 17 points
D: 26 points of which 8 points on at least C-level
C: 34 points of which 14 points on at least C-level
B: 44 points of which 6 points on A-level
A: 53 points of which 11 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled "*Only answer is required*" you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

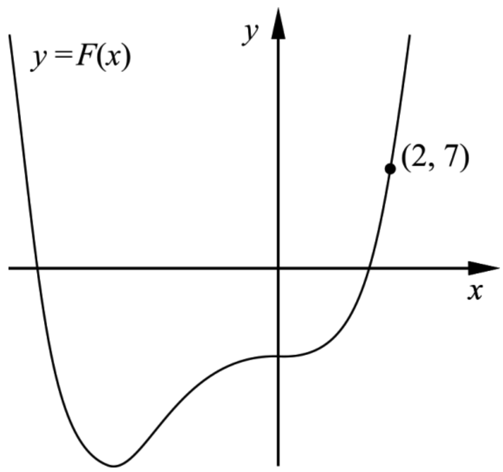
Name: ______________________________

Date of birth: ______________________________

Educational programme: ______________________________

Part D: Digital resources are allowed. Do your solutions on separate sheets of paper.

17. It holds for the function f that $f(x) = x^3 + 3x^2$
F is an antiderivative of f The graph of F passes through the point $(2, 7)$.
See figure.



Find the antiderivative F. (2/0/0)

18. Hugo solves the equation $|x+2| + 0.5x = 5$ and gets the solution $x = 2$
His friend Lisa claims that $x = -12$ is also a solution to the equation.

Is Lisa right? Justify your answer. (1/0/0)

19. The temperature of the water in a bottle placed in a fridge can be described by the model $T(x) = 17e^{-0.693x} + 5$
where $T(x)$ is the temperature of the water in $°C$ and x is the time in hours after the bottle was placed in the fridge.

a) Calculate the temperature of the water when the bottle was placed in the fridge. (1/0/0)

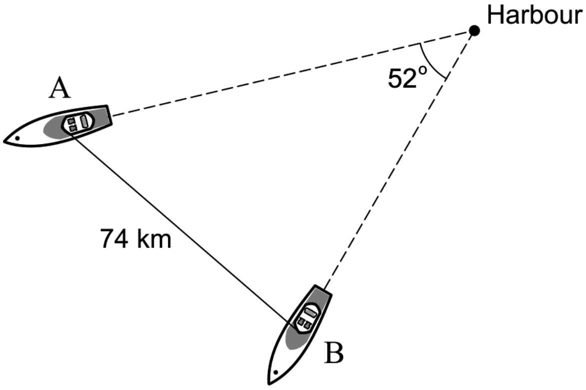
b) Determine how long it takes until the temperature of the water is $10°C$. (2/0/0)

c) Determine how rapidly the temperature of the water is decreasing two hours after the bottle was placed in the fridge. (0/2/0)

d) According to the model, the temperature will, in time, approach a lower limit. Use the model to calculate this lower limit. (0/2/0)

20. The graph of $f(x) = x^4 - 4x$ has a tangent at the point P.
The tangent has the gradient -17.5
Find the x-coordinate of the point P. (0/2/0)

21. Two boats leave a harbour at the same time. Both boats keep a constant speed. Boat A has a speed of 50 km/h and boat B has a speed of 36 km/h. Both boats keep their course straight so that the angle between their directions of travel always is $52°$.

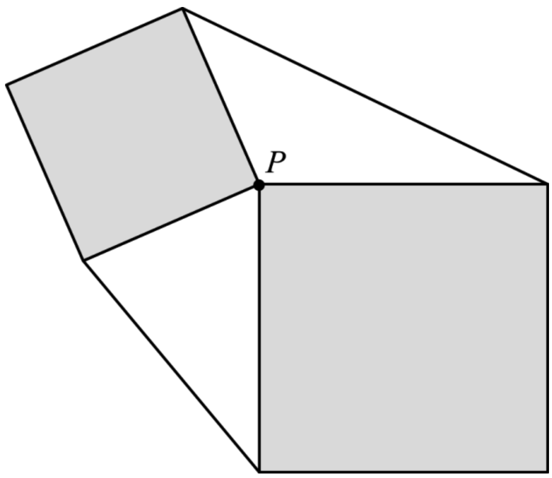


The boats have radio contact with each other. When the distance between them is 74 km, the contact is lost. Assume that it takes t hours before the contact is lost. Calculate the time t. (0/3/0)

22. Two squares of different size are placed according to the following conditions:

- The squares should each have one of their corners at the same point P.
- The squares should not have any other points in common.

Two lines are drawn between the corners of the squares so that two triangles are formed outside the squares. The figure below shows *one* example of what it might look like.



Prove that the area of one of the triangles is always equal to the area of the other triangle. (0/0/3)

23. The bacterium *Clostridium perfringens* may cause serious food poisoning. If food containing this bacterium is left to cool down at room temperature, the number of bacteria increases. Therefore, food should always be cooled as quickly as possible after cooking. It takes approximately 100 000 bacteria per gram of food for a person to get food poisoning.

Assume that immediately after cooking, there are 100 bacteria per gram in a piece of cooked salmon. The cooked salmon is cooled at room temperature. The number of bacteria increases at a rate of $5.73e^{0.0573 \cdot t}$ bacteria per gram per minute at the time t minutes.

How long does it take before there are so many bacteria per gram in the salmon that a person eating from it will risk getting food poisoning? (0/0/4)

24. Sara sells bilberries at the local market. She has found out that every time she increases the price with SEK 1/kg the amount of bilberries she sells per day decreases by 2 %. If she sets the price at SEK 40/kg, she will sell 30 kg per day.

a) Calculate the daily income SEK D as a function of the price increase x in SEK/kg, where $0 \leq x \leq 60$

Only answer is required (0/0/2)

b) Use the function in the a) task and draw the graph. Use the graph to determine what price per kilo will yield the largest daily income. (0/0/1)

To the student - Information about the oral part

You will be given a problem that you will solve in writing, and then you will present your solution orally. If you need, you can ask your classmates or your teacher and use your textbook for help when solving the problem. Your oral presentation starts with you presenting what the problem is about and then you describe and explain your solution. You must present all steps in your solution. However, if you have done the same calculation several times (for example in a table) it might be sufficient if you present some of the calculations. Your presentation should take a maximum of 5 minutes, and be held to a smaller group of your classmates and one or more teachers.

The problem given to you should, on the whole, be solved algebraically. You might need a calculator to do some of the calculations but, when presenting your solution, you should avoid referring to the use of your calculator for drawing graphs and/or symbolic handling (if that is the type of calculator you are using).

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use mathematical terminology.

How complete, relevant and structured your presentation is
Your presentation must contain the necessary parts in order for a listener to follow and understand your thoughts. What you say should be in a suitable order and be relevant. The listener must understand how calculations, descriptions, explanations and conclusions are connected with each other.

How well you describe and explain the train of thought behind your solution
Your presentation should contain both descriptions and explanations. To put it simple, a description answers the question "*How?*" and an explanation answers the question "*Why?*". You describe something when you for instance tell *how* you have done a calculation. You explain something when you for instance justify *why* you could use a certain formula.

How well you use mathematical terminology
In your presentation you should use a language that contains mathematical terms, expressions and symbols, suitable for the problem you have solved.

Mathematical terms are for example words like "exponent", "function" and "graph".

An example of a mathematical expression is that x^2 is read "x to the power 2" or "x squared".
Some examples of mathematical symbols are π and $f(x)$, which are read "pi" and "f of x".

Problem 1.

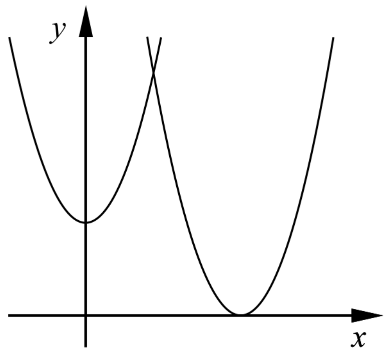
Name:________________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use mathematical terminology.

A region is bounded by the positive coordinate axes, the curve $y = x^2 + 3$ and the curve $y = (x-5)^2$

Calculate the area of the region.



Problem 2.

Name:________________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:
- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use mathematical terminology.

It holds for the function f that $f(x) = 2x^4 - 4x^3$ and $-1 \le x \le 2$

a) Use the derivative to draw the graph of the function.

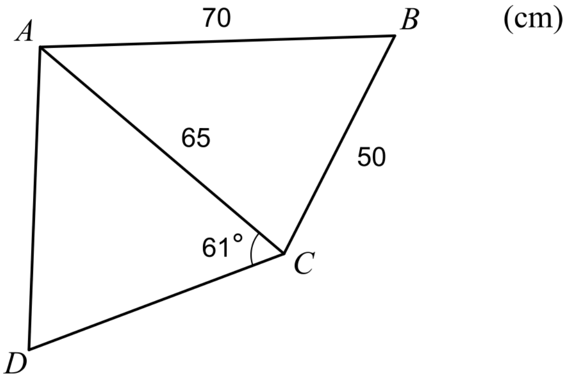
b) Calculate the maximum and minimum values of the function.

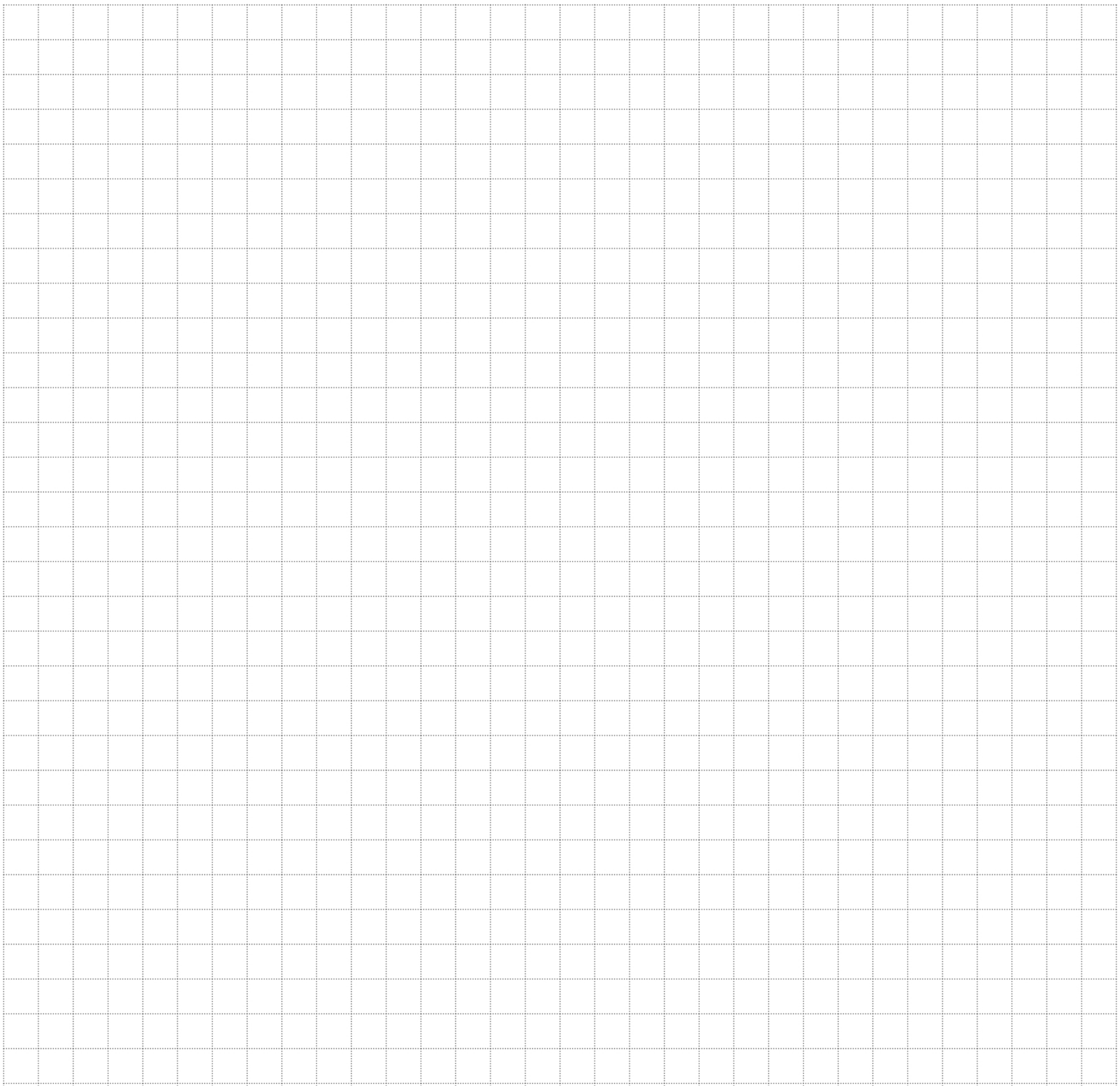
Problem 3.

Name:______________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:
- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use mathematical terminology.

The figure shows a quadrangle $ABCD$. Determine the side CD so that the area of the triangle ACD is equal to the area of the triangle ABC.





Problem 4.

Name:______________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use mathematical terminology.

It holds for the function f that $f(x) = x^2 + x - 20$
The curve has a tangent at the point where the curve intersects the positive x-axis.
Calculate where this tangent intersects the y-axis.

Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	**E**	**C**	**A**	**Max**
Fullständighet, relevans och struktur Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.	Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig. (1/0/0)		Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår. Redovisningen är välstrukturerad. (1/0/1)	(1/0/1)
Beskrivningar och förklaringar Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.	Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar. Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad. (1/0/0)		Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar. (1/0/1)	(1/0/1)
Matematisk terminologi Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen. (1/0/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen. (1/1/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen. (1/1/1)	(1/1/1)
Summa				(3/1/3)

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. …	$+1\ E_P$
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	$+1\ E_P$

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

E	**C**	**A**
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … $1\ E_R$	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … $1\ E_R$ och $1\ C_R$	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … $1\ E_R$, $1\ C_R$ och $1\ A_R$

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga
Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för provbetyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\pm$, $\sqrt{}$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, x, y, $(\ )$, $[\ ]$, $\int \mathrm{d}x$, bråkstreck, index, lim, VL, HL, symbol för vinkel, gradtecken
Termer	t.ex. absolutbelopp, cirkel, enhetscirkel, polynom, rationellt uttryck, kontinuerlig/diskret funktion, rät linje, andragrads-/polynom-/potens-/ exponentialfunktion, funktionsvärde, definitions-/värdemängd, punkt, intervall, område, koordinat, koordinatsystem, graf, kurva, skärningspunkt, nollställe, symmetrilinje, lutning, riktningskoefficient, ändpunkt, sekant, tangent, ändringskvot, förändringshastighet, gränsvärde, derivata, andraderivata, teckenschema, växande/avtagande, extrempunkt, maximi-/ minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, primitiv funktion, integral, talet e, naturlig logaritm
Hänvisningar	t.ex. till derivatans definition, räta linjens ekvation, tangentens ekvation, cirkelns ekvation, enhetscirkeln, areasatsen, cosinussatsen, sinussatsen, definitionen för sinus
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3c i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 19b_1 och 19b_2 den första respektive andra poängen i uppgift 19b.

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
A	M_1				1								
	M_2												1
	M_3				1								
	M_4												1
	M_5				1								
	M_6								1				
	M_7												1
B	1	1											
	2		1										
	3a	1											
	3b	1											
	4a		1										
	4b						1						
	4c						1						
	5a		1										
	5b					1							
	6	1											
	7a	1											
	7b					1							
	8					1							
	9a		1										
	9b						1						
	9c										1		
	10a					1							
	10b									1			
C	11_1				1								
	11_2				1								
	12_1		1										
	12_2		1										
	12_3		1										
	12_4								1				
	13_1						1						
	13_2						1						
	14_1								1				
	14_2								1				
	14_3								1				
	15_1											1	
	15_2											1	
	16_1									1			
	16_2										1		

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	17_1			1									
	17_2			1									
	18				1								
	19a			1									
	19b_1			1									
	19b_2			1									
	19c_1					1							
	19c_2					1							
	19d_1							1					
	19d_2							1					
	20_1							1					
	20_2							1					
	21_1							1					
	21_2							1					
	21_3								1				
	22_1												1
	22_2												1
	22_3												1
	23_1									1			
	23_2											1	
	23_3											1	
	23_4												1
	24a_1											1	
	24a_2											1	
	24b											1	
	Total	**5**	**7**	**5**	**6**	**6**	**5**	**6**	**6**	**3**	**2**	**7**	**7**
Σ	**65**	**23**				**23**				**19**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3c i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

Delprov	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma3c																	
					Aritmetik, algebra och geometri				Samband och förändring										Problemlösning		
		E	C	A	A1	A3	A4	A5	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	P1	P3	P4
A		3	1	3																	
B	1	1	0	0	X																
	2	1	0	0													X	X			
	3a	1	0	0							X										
	3b	1	0	0							X										
	4a	1	0	0							X	X									
	4b	0	1	0							X	X									
	4c	0	1	0							X	X									
	5a	1	0	0			X														
	5b	0	1	0			X														
	6	1	0	0					X												
	7a	1	0	0									X								
	7b	0	1	0									X								
	8	0	1	0							X										
	9a	1	0	0	X																
	9b	0	1	0	X																
	9c	0	0	1	X																
	10a	0	1	0							X			X	X	X					
	10b	0	0	1							X			X	X	X					
C	11	2	0	0			X														
	12	3	1	0							X	X		X	X	X					
	13	0	2	0													X	X			
	14	0	3	0													X	X			
	15	0	0	2	X														X		
	16	0	0	2					X		X	X	X	X							
D	17	2	0	0													X		X		
	18	1	0	0		X															
	19a	1	0	0									X								
	19b	2	0	0									X						X	X	
	19c	0	2	0							X	X	X	X		X					
	19d	0	2	0					X				X						X	X	
	20	0	2	0						X	X	X		X		X			X		
	21	0	3	0				X											X	X	
	22	0	0	3			X	X													
	23	0	0	4							X		X				X	X	X	X	
	24a	0	0	2	X														X	X	
	24b	0	0	1							X			X	X				X	X	
Total		23	23	19																	

Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 65 poäng varav 23 E-, 23 C- och 19 A-poäng. Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla fyra delprov, det vill säga Delprov A, B, C och D.

Kravgräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 26 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 34 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 44 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 53 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Bedömningsformulär

Elev:____________________________ Klass:________________ Provbetyg: ____________

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
A	M_1												
	M_2												
	M_3												
	M_4												
	M_5												
	M_6												
	M_7												
B	1												
	2												
	3a												
	3b												
	4a												
	4b												
	4c												
	5a												
	5b												
	6												
	7a												
	7b												
	8												
	9a												
	9b												
	9c												
	10a												
	10b												
C	11_1												
	11_2												
	12_1												
	12_2												
	12_3												
	12_4												
	13_1												
	13_2												
	14_1												
	14_2												
	14_3												
	15_1												
	15_2												
	16_1												
	16_2												

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	17_1												
	17_2												
	18												
	19a												
	19b_1												
	19b_2												
	19c_1												
	19c_2												
	19d_1												
	19d_2												
	20_1												
	20_2												
	21_1												
	21_2												
	21_3												
	22_1												
	22_2												
	22_3												
	23_1												
	23_2												
	23_3												
	23_4												
	24a_1												
	24a_2												
	24b												
	Total												
Σ													

	Total	**5**	**7**	**5**	**6**	**6**	**5**	**6**	**6**	**3**	**2**	**7**	**7**
Σ	**65**	**23**				**23**				**19**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Delprov B

1.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (-4)	+1 E_B
2.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar $\left(\frac{8}{3}\right)$	+1 E_P
3.		**Max 2/0/0**
a)	Godtagbart ritad tangent	+1 E_B
b)	Godtagbart ritad sekant som skär grafen i två punkter	+1 E_B
	Se avsnittet Bedömda elevlösningar.	
4.		**Max 1/2/0**
a)	Korrekt svar ($f'(x)=15x^2-16x$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar $\left(f'(x)=\frac{3-e^{-x}}{2}\right)$	+1 C_P
c)	Korrekt svar ($f'(x)=x^{-1,5}$)	+1 C_P
5.		**Max 1/1/0**
a)	Korrekt svar ($1,5$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar ($-0,5$)	+1 C_B

6.		**Max 1/0/0**
	Godtagbart ritad graf (Markering av punkterna (1, 1), (2, 4) och (3, 9))	+1 E_B
7.		**Max 1/1/0**
a)	Korrekt svar (G)	+1 E_B
b)	Korrekt svar (H)	+1 C_B
8.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar (Alternativ E)	+1 C_B
9.		**Max 1/1/1**
a)	Korrekt svar (3)	+1 E_P
b)	Korrekt svar $\left(\dfrac{x-3}{2(x+3)}\right)$	+1 C_P
c)	Korrekt svar ($(x-1)^{12}$)	+1 A_P
10.		**Max 0/1/1**
a)	Korrekt svar (C)	+1 C_B
b)	Korrekt svar (B, D och E)	+1 A_B

Delprov C

11. **Max 2/0/0**

Godtagbar inledning till resonemang, t.ex. sätter $x = 10$ och $y = 6$ i cirkelns ekvation +1 E_R

med i övrigt godtagbart slutfört resonemang med slutsatsen att punkten inte ligger på cirkeln +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

12. **Max 3/1/0**

Godtagbar ansats, deriverar och tecknar ekvationen $3x^2 - 12x + 9 = 0$ +1 E_P

med korrekt bestämning av derivatans nollställen, $x_1 = 1$ och $x_2 = 3$ +1 E_P

med godtagbar verifiering, t.ex. verifiering av maximum då $x_1 = 1$ och uteslutning av nollstället $x_2 = 3$ med korrekt svar ($x = 1$) +1 E_P

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

13. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion, $\frac{x^4}{16} + \frac{x}{4}$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (1,5 a.e.) +1 C_P

Kommentar: Svar med utelämnad eller felaktig enhet godtas.

14. **Max 0/3/0**

Godtagbar generell ansats, där två relevanta areor beräknas, t.ex.

$\int_0^a kx^2 \mathrm{d}x = \frac{ka^3}{3}$ och $a \cdot ka^2 = ka^3$ +1 C_R

med godtagbart slutfört bevis +1 C_R

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

15. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, skriver om nämnaren som $(x-1)(x+3)$ och inser att en av faktorerna $(x-1)$ eller $(x+3)$ ska finnas i täljaren $x^2-ax-12$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a_1=-11$ och $a_2=1$) +1 A_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

16. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t.ex. visar insikt om att $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3^h-1}{h}=y'(0)$ +1 A_B

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($\ln 3$) +1 A_P

Delprov D

17. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer ett allmänt uttryck för den primitiva funktionen, $F(x)=0,25x^4+x^3+C$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($F(x)=0,25x^4+x^3-5$) +1 E_{PL}

18. **Max 1/0/0**

Godtagbart enkelt resonemang, där det framgår att $\left|-12+2\right|+0,5\cdot(-12)=4,$ med slutsatsen att Lisa har fel +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

19. **Max 3/4/0**

a) Godtagbar lösning med korrekt svar ($22\,°\mathrm{C}$) +1 E_M

b) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $17\mathrm{e}^{-0,693x}+5=10$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($1,8$ h) +1 E_M

c) Godtagbar ansats, visar insikt om att funktionen ska deriveras +1 C_B

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar inklusive korrekt enhet ($2,9\,°\mathrm{C/h}$) +1 C_B

Kommentar: Svaret $-2,9\,°\mathrm{C/h}$ bedöms som godtagbart.

d) Godtagbar ansats, t.ex. ansätter några värden på x i funktionsuttrycket +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($5\,°\mathrm{C}$) +1 C_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

20. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. deriverar och tecknar ekvationen $4x^3-4=-17,5$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($-1,5$) +1 C_{PL}

21. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, tecknar en användbar ekvation med hjälp av cosinussatsen +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($1,9$ h) +1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

22. **Max 0/0/3**

Godtagbar generell ansats, ansätter två sidor med olika längder och lämpliga vinklar samt använder areasatsen i två trianglar	+1 A_R
med i övrigt korrekt slutfört bevis inklusive hänvisning till sambandet $\sin v = \sin(180° - v)$	+1 A_R
Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4	+1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

23. **Max 0/0/4**

Godtagbar ansats, t.ex. visar insikt om att $\int 5,73e^{0,0573 \cdot t} dt$ kan användas	+1 A_B
med godtagbar fortsättning, tar hänsyn till att antalet bakterier är 100 då $t = 0$, t.ex. genom att teckna ekvationen $100 + \int_0^x 5,73e^{0,0573 \cdot t}\, dt = 100000$	+1 A_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (120 min)	+1 A_{PL}
Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4	+1 A_K

Kommentar: Observera att vissa felaktiga lösningar,
t.ex. $\int_0^x 5,73e^{0,0573 \cdot t}\, dt = 100000$ också ger svaret 120 minuter.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

24. **Max 0/0/3**

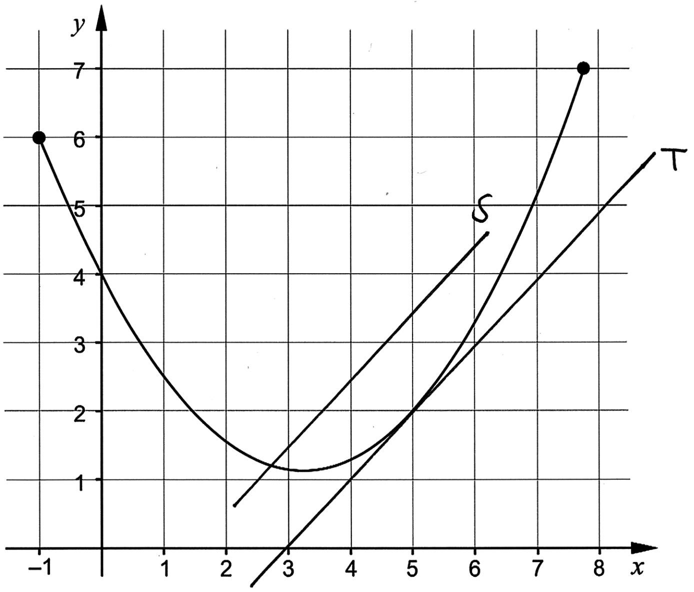
a)	Godtagbar ansats, funktionsuttrycket innehåller faktorn $30 \cdot 0,98^x$	+1 A_M
	med korrekt svar ($D(x) = (40 + x)(30 \cdot 0,98^x)$)	+1 A_M
b)	Godtagbar grafisk lösning, där det korrekta funktionsuttrycket $D(x) = (40 + x)(30 \cdot 0,98^x)$ används, med godtagbart svar (49,50 kr/kg)	+1 A_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Bedömda elevlösningar

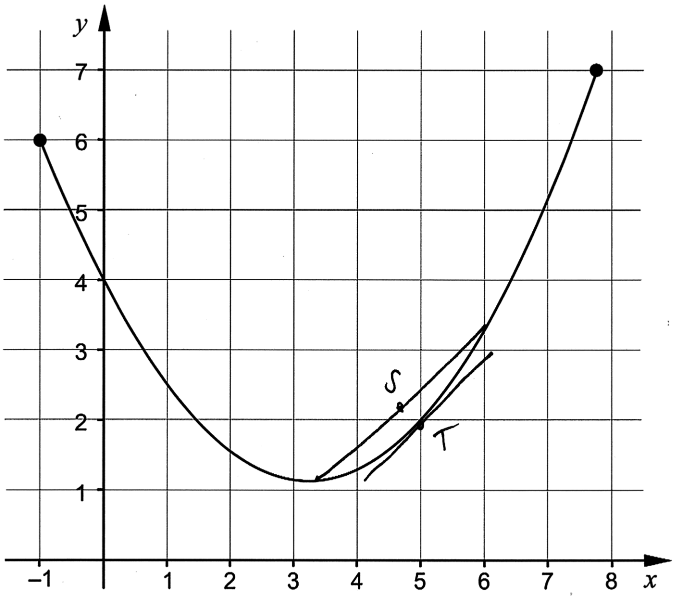
Uppgift 3

Elevlösning 1 (1 E_B)



Kommentar: a) Tangenten är godtagbart ritad, vilket ger en begreppspoäng på E-nivå.
b) Sekanten uppfyller inte kraven för en begreppspoäng på E-nivå eftersom den inte skär grafen i två punkter.

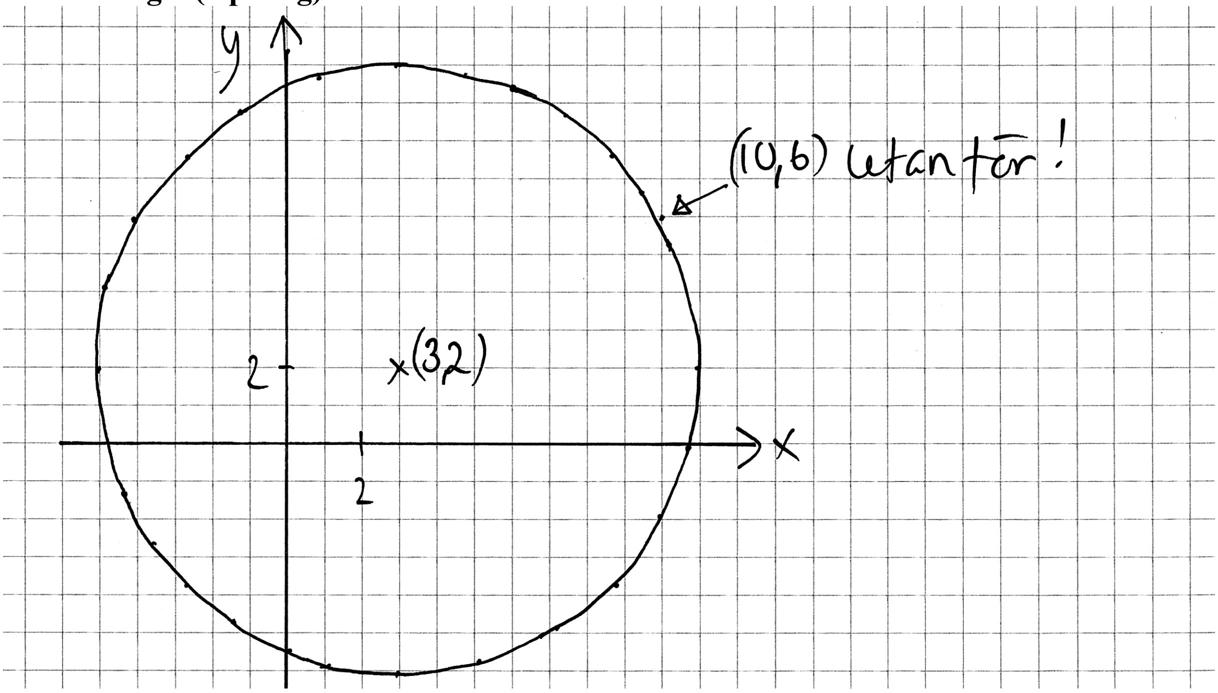
Elevlösning 2 (2 E_B)



Kommentar: Tangenten och framförallt sekanten borde ha varit längre och lutningen är inte riktigt 1. Trots detta bedöms lösningen nätt och jämnt ge två begreppspoäng på E-nivå.

Uppgift 11

Elevlösning 1 (0 poäng)



Kommentar: Elevlösningen visar en noggrant ritad figur, men en figur anses inte vara tillräcklig för att avgöra om punkten ligger på cirkeln eller inte. Lösningen ges 0 poäng.

Elevlösning 2 (1 E_R)

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 64$

$(10-3)^2 + (6-2)^2 = 64$

$(100-9) + (36-4) = 64$

$91 + 32 \neq 64$

Nej, den ligger inte på cirkeln!

Kommentar: Lösningen visar en godtagbar ansats där $x = 10$ och $y = 6$ ansätts i ekvationen men sedan följer ett räknefel. Lösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösning 3 (2 E_R)

$(10-3)^2 + (6-2)^2 = 64 \Rightarrow$

$7^2 + 4^2 = 64 \Rightarrow$

$49 + 16 = 65 = 64$ Falskt

Nej, det gör den inte

Kommentar: Lösningen visar ett godtagbart enkelt resonemang trots formella brister. Sammantaget ges lösningen nätt och jämnt två resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 12

Elevlösning 1 (2 E_P och 1C_K)

$V(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

Vmax finns där $V'(x) = 0$

$V'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ pq-formeln ger vidare att

$\Rightarrow \quad x = -\left(-\frac{4}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3}$

$= 2 \pm \sqrt{1}$

$\Rightarrow \quad x_1 = 2 + 1 = 3$ dm

$x_2 = 2 - 1 = 1$ dm

X_1 ger att sidan $x = 3$dm vilket är orimligt då detta är den kvadratiska plåtens sida.

Därav finns Vmax i $x = 1$. Sidan ska vara 1 dm för att boet ska bli så stort som möjligt.

Svar: 1 dm

Kommentar: I elevlösningen motiveras varför $x = 3$ dm är orimligt men verifiering av att $x = 1$ dm motsvarar ett maximum saknas, vilket gör att kraven för tredje procedurpoängen på E-nivå inte är uppfyllda. När det gäller kommunikation är uppgiften i det närmaste behandlad i sin helhet och redovisningen är mycket lätt att följa och förstå samt symboler används med god anpassning till syfte och situation. Därmed anses kraven för kommunikationspoängen på C-nivå vara uppfyllda. Sammantaget ges elevlösningen två procedurpoäng på E-nivå och kommunikationspoängen på C-nivå.

Elevlösning 2 (3 E_P och 1 C_K)

Sökes: Största möjliga volym

Givet: Sidan är 3 dm

$V(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

Lösning: $V'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$V'(x) = 0$ ger $3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$

$(x_1 = 3)$ $\quad x_2 = 1$

$V''(x) = 6x - 12$

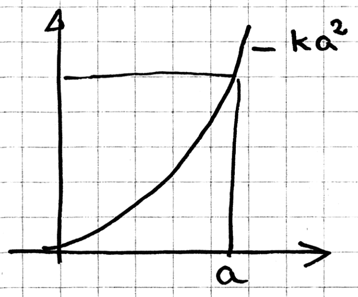
$V''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6$ $\quad V(1)$ max

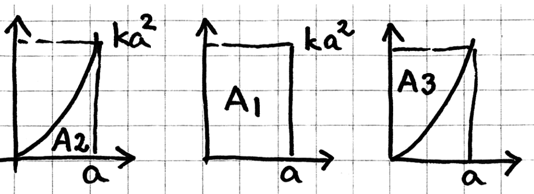
Svar $x = 1$

Kommentar: Uppgiften är löst i sin helhet inklusive uteslutning av $x = 3$ och verifiering av maximum. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad och möjlig att följa och förstå trots att motiveringen till varför $x = 1$ ger ett maximum är ofullständig. Elevlösningen ges tre procedurpoäng på E-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå

Uppgift 14

Elevlösning 1 (1 C_R och 1 C_K)





$A_1 = a \cdot ka^2 = ka^3$

$A_2 = \int_0^a kx^2\,dx = \left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^a = \frac{ka^3}{3}$

Om $A_2 + A_3$ ska vara lika med A_1 så måste $A_3 = \frac{2ka^3}{3}$

Kommentar: Relevanta areor beräknas korrekt men bevisföringen är inte helt slutförd eftersom en slutsats av typen ”dvs $A_3 = 2A_2$” saknas. Även om beviset inte är helt fullständigt så är lösningen välstrukturerad och lätt att följa och förstå. Matematiska symboler används korrekt och figurerna förtydligar lösningen. Elevlösningen ges en resonemangs- och en kommunika-tionspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C_R och 1 C_K)

$$A_{uit} = \int_0^a (kx^2)\,dx = \left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^a = \frac{ka^3}{3}$$

$$y = ka^2$$

$$A_{rek} = a \cdot ka^2 = ka^3$$

$$A_{grå} = ka^3 - \frac{ka^3}{3} = \frac{2ka^3}{3}$$

$$A_{grå} = 2 \cdot A_{uit}$$

$$\frac{2ka^3}{3} = 2 \cdot \frac{ka^3}{3} \qquad \text{V.S.B.}$$

Kommentar: Elevlösningen visar ett godtagbart bevis. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå. Visserligen saknas figur men detta kompenseras av användningen av index. Elevlösningen ges två resonemangspoäng och en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 15

Elevlösning 1 (0 poäng)

$$\frac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x^2 - ax - 12}{(x-1)(x+3)} =$$

$$x = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 3}$$

$x_1 = 1$ och $x_2 = -3$

Kommentar: Nämnaren faktoriseras korrekt men det framgår inte att faktorerna även ska finnas i täljaren för att förkortning ska vara möjlig. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (1 A_{PL})

$$\frac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3}$$

Man kan inte använda några kvadreringsregler eftersom det är − framför 12 och 3.

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

För att det ska bli 12 måste man ha med 4 och 3 i parenteserna.

$$(x+3)(x-4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12$$

Detta gör att om $a = 1$ kan man förenkla uttrycket.

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x-4}{x-1}$$

Svar: $a = 1$

Kommentar: I elevlösningen faktoriseras nämnaren och det ena värdet på a bestäms. Elevlösningen ges en problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 3 (2 A_{PL})

Förkortning möjlig

a_1

$$\frac{x^2-ax-12}{x^2+2x-3}=\frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x-1)}=\frac{x^2-4x+3x-12}{x^2-x+3x-3}=\frac{x^2-x-12}{x^2+2x-3}$$

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$$

Förkortning möjlig

$$\frac{x^2-ax-12}{x^2+2x-3}=\frac{(x-1)(x+12)}{(x+3)(x-1)}=\frac{x^2+12x-x-12}{x^2+2x-3}=$$

$$=\frac{x^2-11x-12}{x^2+2x-3}$$

a_2

$\boxed{\text{svar } a_1=1 \quad a_2=11}$

Kommentar: Elevlösningen är korrekt förutom ett lapsusfel i sista ledet. Elevlösningen ges två problemlösningspoäng på A-nivå.

Uppgift 18

Elevlösning 1 (0 poäng)

$$|x+2|+0.5x=5$$

LISA HAR FEL.

$$(-12+2)+(-6)=5$$
$$(-10)+(-6)=5$$
$$10-6=4$$

Kommentar: Elevlösningen visar ett resonemang som inte bedöms som godtagbart eftersom parentes används istället för absolutbeloppstecken på andra och tredje raden. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (1 E_R)

$$|-12+2|+0.5\cdot(-12)=5$$
$$|-10|+(-6)=5$$
$$10-6=4\neq 5$$

Hon har fel!!!

Kommentar: Elevlösningen visar ett resonemang som på de två första raderna inte är formellt korrekt eftersom $VL \neq HL$. Elevlösningen bedöms nätt och jämnt uppfylla kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösning 3 (1 E_R)

Nej, eftersom $|-12+2|=10$ och

$10+0,5\cdot(-12)=10-6=4$

Kommentar: Elevlösningen visar ett något kortfattat resonemang som nätt och jämnt bedöms uppfylla kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 19d

Elevlösning 1 (0 poäng)

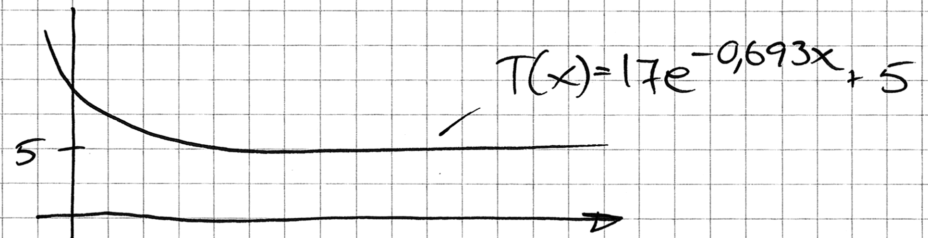
Vi säger att $x = 1000$

$T(1000) = 17e^{-0,693 \cdot 1000} + 5 = 5$ Svar $5°C$ (undre gräns)

Kommentar: I elevlösningen ansätts enbart ett värde på x vilket inte är tillräckligt för att dra slutsatsen att uttryckets värde *närmar sig* 5. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (2 C_M)

Temperaturen blir $5°C$. Det kan vi se när vi ritar upp grafen m.hj.a. miniräknaren



Grafen sjunker inte under $y = 5$ utan stannar på $y = 5$
Vattnet kan alltså inte bli kallare än $5°C$.

Kommentar: I elevlösningen används den matematiska modellens graf för att visa att den undre gränsen är $5°C$. Skalan på x-axeln framgår inte, grafen går inte genom $(0,22)$ och det är inte matematiskt korrekt att skriva att ”Grafen … stannar på $y = 5$”. Trots detta bedöms elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för två modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösning 3 (2 C_M)

$$\lim_{x \to \infty} \underbrace{17e^{-0,693x}} + 5 = 5$$

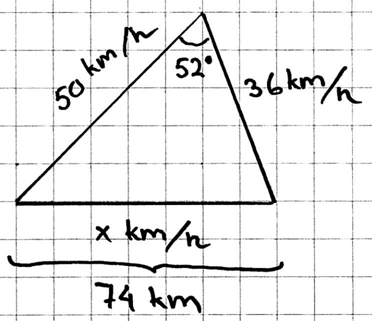
Detta kommer att gå mot noll när x går mot ~~..~~ oändligheten och kvar blir då 5.

SVAR: Undre gräns är $5°C$

Kommentar: I elevlösningen används modellen för att visa att den undre gränsen för vattnets temperatur är $5°C$. Elevlösningen uppfyller kraven för två modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 21

Elevlösning 1 (1 C_{PL})

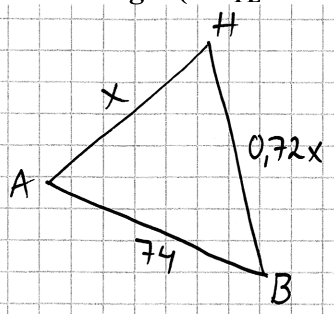


$x^2 = 36^2 + 50^2 - 2 \cdot 36 \cdot 50 \cdot \cos 52 \Rightarrow$

$x = 39{,}7444$ km/h

Kommentar: Elevlösningen visar en godtagbar ansats. Lösningen ges den första problemlösningspoängen på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C_{PL} och 1 C_K)



x är sträckan som båt A hinner köra

$\frac{36}{50} = 0{,}72$

cossats: $74^2 = (0{,}72 \cdot x)^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot (0{,}72x) \cos 52°$

Enligt solve $\Rightarrow$ ($x_1 = -94{,}9639$) ej negativ sträcka

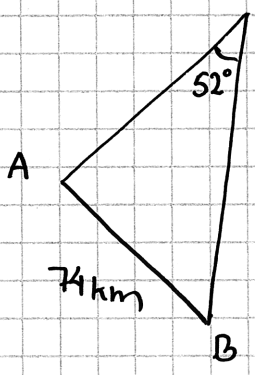
$x_2 = 94{,}9639$

HA = 94,9639 km = 95,0 km

tid $t = \frac{95{,}0}{50} = 1{,}9$ h SVAR: Efter 1,9 h

Kommentar: Uppgiften är löst i sin helhet och korrekt. När det gäller kommunikation förklaras inte kvoten 36/50 i inledningen, tidsberäkningen redovisas inte med formel och figuren saknar ”km”. Trots detta brister är elevlösningen möjlig att följa och förstå. Sammantaget ges elevlösningen två problemlösningspoäng samt nätt och jämnt kommunikationspoängen på C-nivå.

Elevlösning 3 (2 C_{PL} och 1 C_K)



Om tiden är t blir sidorna

50t och 36t

Cosinussatsen:

$74^2 = 50t^2 + 36t^2 - 2\cdot 50t \cdot 36t \cdot \cos 52$

$5476 = 2500t^2 + 1296t^2 - (3600 \cos 52)t^2$

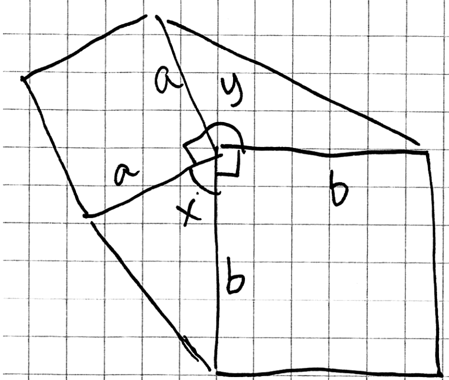
$5476 = 1579t^2$

$t = \sqrt{\frac{5476}{1579}}$ $\quad t = 1{,}9 \quad$ Svar $t = 1{,}9\,h$

Kommentar: Uppgiften är löst i sin helhet och korrekt. När det gäller kommunikation saknas parenteser i ekvationen som baseras på cosinussatsen och gradtecken på något ställe samt formeln $s = v \cdot t$. I övrigt är lösningen välstrukturerad och möjlig att följa och förstå. Sammantaget ges elevlösningen två problemlösningspoäng samt nätt och jämnt kommunikationspoängen på C-nivå.

Uppgift 22

Elevlösning 1 (2 A_R)



$A_y = 360 - 90 - 90 - x = 180 - x$

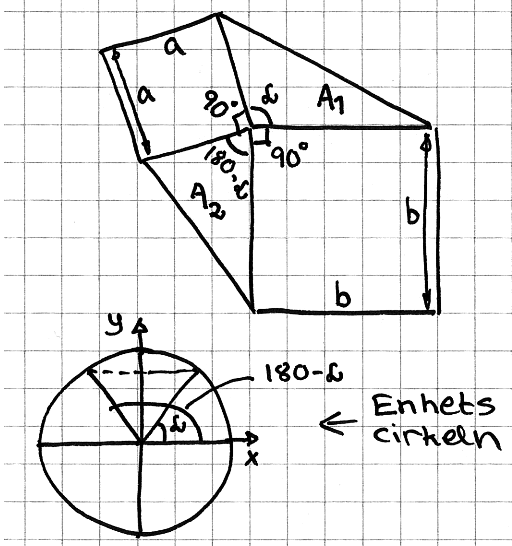
$\sin(180 - x) = \sin x$

$A = \frac{ab \cdot \sin x}{2} = \frac{ab \sin(180 - x)}{2}$

V.S.B

Kommentar: Elevlösningen är mycket kortfattad men innehåller det nödvändigaste för att beviset ska vara hållbart, t.ex. hänvisas till sambandet $\sin(180° - v) = \sin v$. Elevlösningen ges därmed nätt och jämnt två resonemangspoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation saknas hänvisning till areasatsen. Dessutom är kopplingen mellan figuren och de areor som tecknats på sista raden otydlig. Gradtecken saknas genomgående. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda.

Elevlösning 2 (2 A_R och 1 A_K)



a = sida på kvadrat 1
b = sida på kvadrat 2

Areasatsen

$$A_1 = \frac{a \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$$

$$A_2 = \frac{a \cdot b \cdot \sin(180-\alpha)}{2}$$

alltså vinkeln α och $(180-\alpha)$ har samma sinusvärde

$$\frac{ab\sin\alpha}{2} = \frac{ab\sin(180-\alpha)}{2} = A_1 = A_2$$

V.S.V

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet och är korrekt. När det gäller kommunikation saknas gradtecken på vissa ställen men lösningen är lätt att följa och förstå eftersom bevisets bärande delar förklaras och kopplingen mellan figur och areauttryck är tydlig. Elevlösningen ges två resonemangs- och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 23

Elevlösning 1 (1 A_B)

100 från början (per gram)

hastighet $5,73e^{0,0573t}$ bakt./min

$$\int_0^t 5,73e^{0,0573t} = 100\,000$$

$$= \left[\frac{5,73e^{0,0573 \cdot t}}{0,0573}\right]_0^t = \left[100e^{0,0573t}\right]_0^t$$

$$= 100e^{0,0573t} - 100e^0 = 100e^{0,0573t} - 100$$

$$= 10\,000 + 100 = 100e^{0,0573t}$$

$$10100 = 100e^{0,0573t}$$

$$1001 = e^{0,0573t}$$

$$\ln 1001 = \ln e^{0,0573t}$$

$$0,0573t = \frac{\ln 1001}{\ln e}$$

$$t \approx 121 \text{ min}$$

Kommentar: Elevlösningen visar insikt om att $\int 5,73e^{0,0573 \cdot t}\,dt$ ska beräknas, men tar ingen hänsyn till antalet bakterier då $t = 0$. Elevlösningen uppfyller därmed kraven för en begrepps-poäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 A_B och 1 A_{PL})

$5,73\,e^{0,0573t}$

Gör om från $f'(x)$ till $f(x)$

$f(x) = \dfrac{5,73\,e^{0,0573t}}{0,0573} + C$ (100 bakterier från början. $C=100$)

$f(x) = 100\,e^{0,0573t} + 100 = 100000$

$99900 = 100\,e^{0,0573t}$

$\dfrac{99900}{100} = e^{0,0573t}$

$\ln(999) = 0,0573t$

$\dfrac{\ln(999)}{0,0573} = t$

$t \approx 120,5$ min

Kommentar: Elevlösningen visar insikt om att antalet bakterier som funktion av tiden ges av $f(x) = \dfrac{5,73\mathrm{e}^{0,0573t}}{0,0573} + C.$ Lösningen tar hänsyn till att antalet bakterier är 100 då $t = 0$ men bestämningen av konstanten är felaktig. Elevlösningen ges därmed en begreppspoäng och en problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 3 (1 A_B, 1 A_{PL} och 1 A_K)

Om $f(t) = 5{,}73\,e^{0{,}0573t}$ beskriver hur antalet bakterier förändras per gram så kommer dess primitiva funktion $F(t)$ att beskriva antalet bakterier som finns per gram.

$$F(t) = \frac{5{,}73e^{0{,}0573t}}{0{,}0573} + C$$

Vid tillagning, då $t=0$, finns det 100 bakterier/g lax
Alltså är $F(0) = 100$.

$$100 = \frac{5{,}73\,e^{-0{,}0573\cdot 0}}{0{,}0573} + C \Rightarrow C = 100 - \frac{5{,}73e}{0{,}0573} = 100 - 100e$$

$$C = 100 - 100e \Rightarrow F(t) = \frac{5{,}73e^{0{,}0573t}}{0{,}0573} + 100 - 100e =$$

$$= 100e^{0{,}0573t} + 100 - 100e$$

Om gränsen är 100000 bakterier så kommer $F(t) = 100000$ när det blir farligt att äta laxen.

$$F(t) = 100000 = 100e^{0{,}0573t} + 100 - 100e \Rightarrow 1000 = e^{0{,}0573t} + 1 - e$$

$$999 + e = e^{0{,}0573t}$$

$$\ln(999+e) = 0{,}0573t \Rightarrow t = \frac{\ln(999+e)}{0{,}0573} \approx 121\text{ min}$$

Svar: Det tar c:a 121 min innan laxen gör en matförgiftad.

Kommentar: Elevlösningen visar insikt om att antalet bakterier som funktion av tiden ges av $f(x) = \dfrac{5{,}73e^{0{,}0573t}}{0{,}0573} + C.$ Lösningen tar hänsyn till att antalet bakterier är 100 då $t = 0$ men bestämningen av konstanten är felaktig. När det gäller kommunikation är elevlösningen lätt att följa och förstå eftersom funktionsbeteckningar är tydligt definierade, resonemangen kring bestämning av primitiv funktion och konstanten C är utskrivna och symboler används korrekt, med god anpassning till syfte och situation. Sammantaget ges elevlösningen en begrepps-, en problemlösnings- och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 4 (1 A_B och 2 A_{PL})

$y = C \cdot a^t$

t = antal år
$C = 100$ = startmängd
a = förändringsfaktor

$v = \frac{\text{antal bakterier}}{\text{min}}$

$v(t) = N'(t) \rightarrow V(t) = 5{,}73 \cdot e^{0{,}0573t}$ eftersom funktionen har en hastighet bakterier/g/min

primitiv till $v(t) = N'(t)$ $\rightarrow N(t) = \frac{5{,}73 \cdot e^{0{,}0573t}}{0{,}0573} + C$

N = antal bakterier $N(t) = 100 \cdot e^{0{,}0573t} + C$ $e^{0{,}0573} = a$ = förändringsfaktorn

$N(t) = 100 \cdot 1{,}05897^t + C$ $N(0) = 100$ alltså måste $C = 0$

$100\,000 = 100 \cdot 1{,}05897^t$

$1000 = 1{,}05897^t$

$t = 120{,}55 \approx 120$ min

Svar: 120 min tar det innan det finns 100 000 st bakterier/g i laxen.

Kommentar: Elevlösningen visar en metod för att bestämma tiden. När det gäller kommunikation så anses inte elevlösningen vara lätt att följa och förstå. Det beror främst på byte av funktionsbeteckning i inledningen, att *C* används med två olika betydelser och att det inte visas hur slutekvationen löses. Sammantaget ges elevlösningen en begreppspoäng och två problemlösningspoäng på A-nivå.

Uppgift 24a

Elevlösning 1 (1 A_M)

a) $D = 1 \cdot x + 40 \cdot 30 \cdot 0{,}98^x$

Kommentar: Elevlösningen innehåller faktorn $30 \cdot 0{,}98^x$ och uppfyller därmed kraven för en modelleringspoäng på A-nivå.