Part B	Problems 1-11 which only require answers.
Part C	Problems 12-16 which require complete solutions.
Test time	120 minutes for Part B and Part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 65 points consisting of 24 E-, 23 C- and 18 A-points.

Level requirements for test grades
E: 18 points
D: 28 points of which 8 points on at least C-level
C: 36 points of which 15 points on at least C-level
B: 46 points of which 7 points on A-level
A: 55 points of which 12 points on A-level

The number of points you can have for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge level(s) (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled *"Only answer is required"* you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: ______________________________

Date of birth: ______________________________

Educational programme: ______________________________

Part B: Digital resources are not allowed. *Only answer is required*. Write your answers in the test booklet.

1. Determine $f'(x)$ if

a) $f(x) = 4x^3 + 7x + 2$ $f'(x) =$ ______________ (1/0/0)

b) $f(x) = e^{2x}$ $f'(x) =$ ______________ (1/0/0)

2. Calculate $\left| 3 - 3^2 \right|$ ______________ (1/0/0)

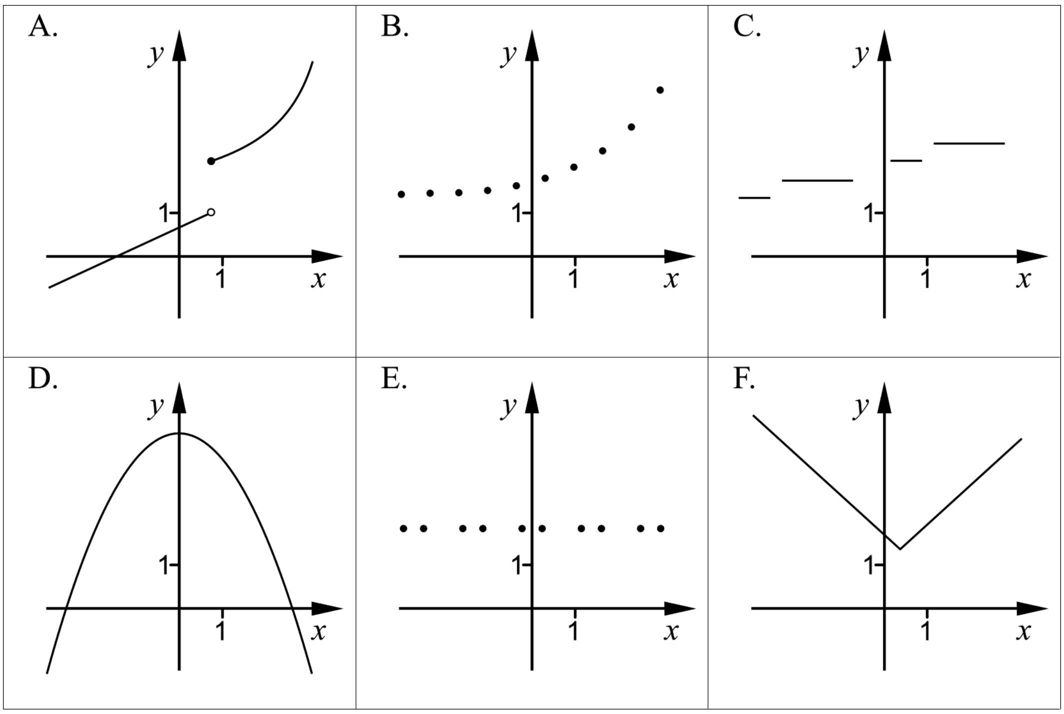
3. The figures show the main characteristics of the graphs of six different functions.

a) Two of the figures A-F show a graph of a discrete function. Which two?

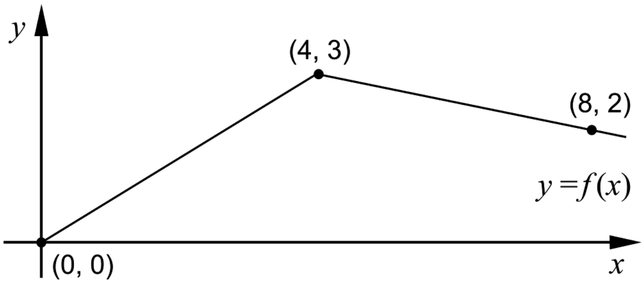
______________ (1/0/0)

b) Two of the figures A-F show a graph of a function which is continuous for all *x*. Which two?

______________ (1/0/0)



4. The figure shows the graph of the function f.



a) Determine $\int_0^4 f(x)\,dx$ ____________________ (1/0/0)

b) Determine $f'(5)$ ____________________ (1/0/0)

5. Simplify the expressions as far as possible.

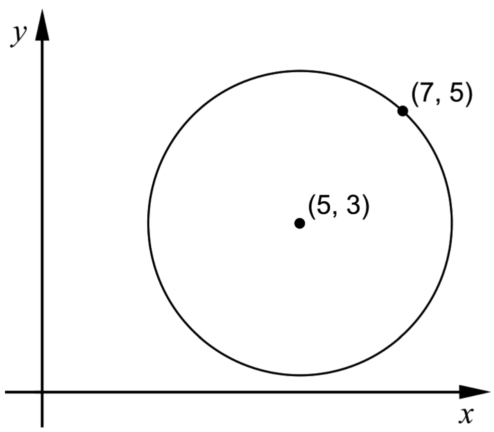
a) $x(7+x)(7-x)+x^3$ ____________________ (1/0/0)

b) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)^{-1}$ ____________________ (0/1/0)

c) $\frac{2}{x-2}+\frac{x}{2-x}$ ____________________ (0/1/0)

6. The equation of a circle can be written $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
The point (7, 5) lies on a circle with its centre at (5, 3), see figure.

Determine a, b and r for this circle.



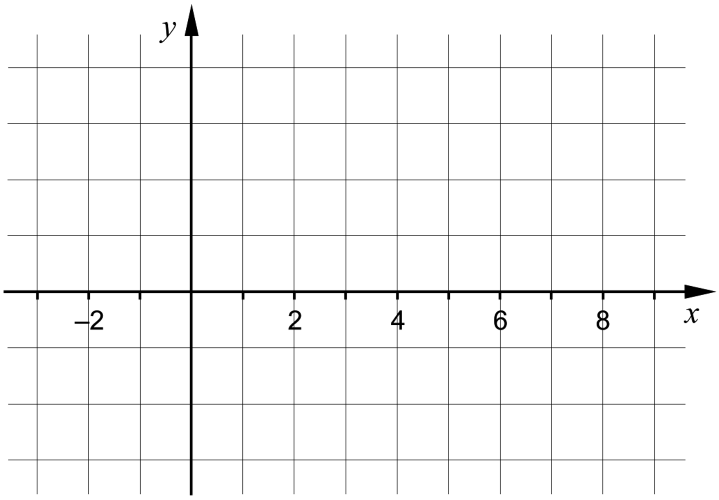
$a =$ ________ $b =$ ________ (1/0/0)

$r =$ ____________________ (0/1/0)

7. It holds for a polynomial function f that the derivative has only two zeroes. The table shows the sign of the derivative for some different values of x.

x	-2	0	2	5	7
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Sketch a possible graph of the function f in the coordinate system below. (0/2/0)



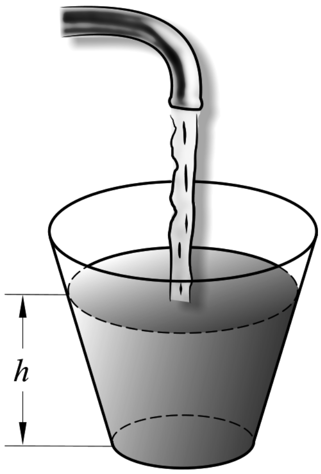
8. There are several rational expressions that satisfy the following conditions:

- The expression has the value 0 only when $x=-5$
- The expression is not defined for $x=10$

Give an example of a rational expression that satisfies both conditions.

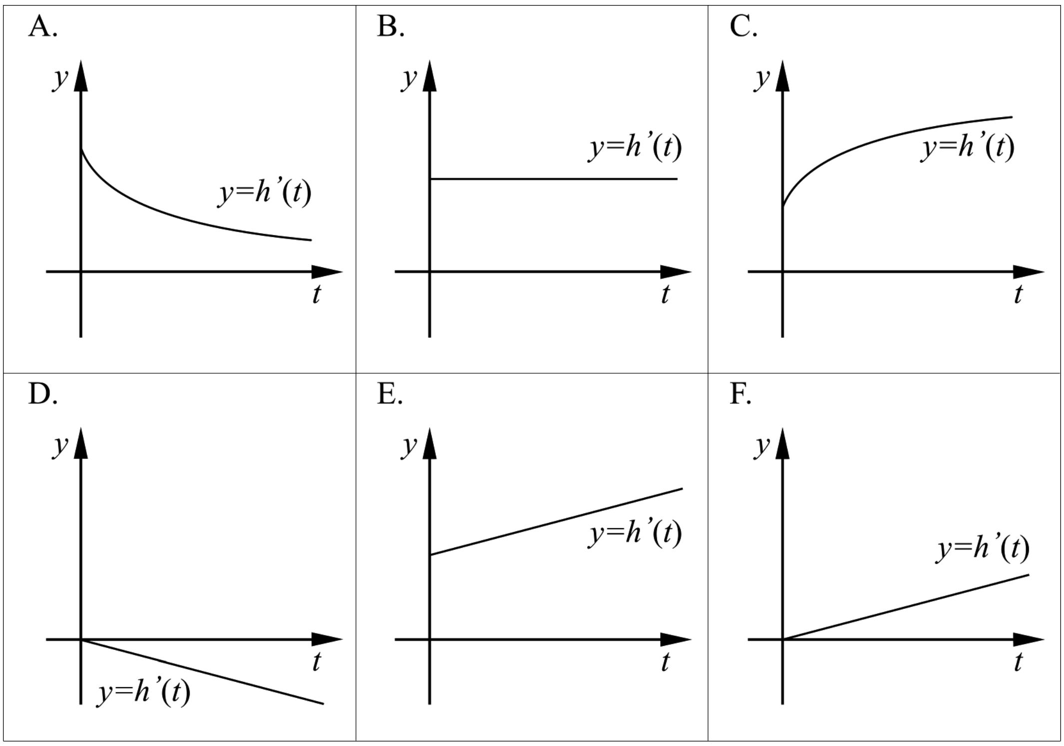
_______________________ (0/2/0)

9. The figure shows how a glass is filled with water. The glass is narrower at the bottom. The water pours out of the tap at a constant speed. The height of the water surface *h* above the bottom of the glass is a function of time *t*.



Which of the graphs A-F *best* describes the derivative $h'(t)$ during the time the glass is filled?

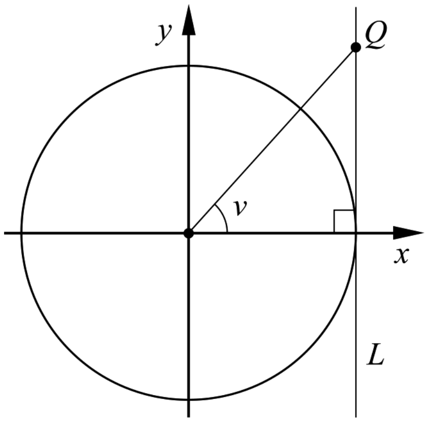
______________________ (0/1/0)



10. Give an example of a function f that is not constant and that has the limit 3 when $x \to \infty$.

$f(x) =$ _______________ (0/0/1)

11. The figure below shows a unit circle touched by a line L which is parallel to the y-axis. There is a point Q on the line L that has y-coordinate t. The line segment between the origin and Q forms the angle v with the x-axis. It holds for the angle v that $0° < v < 90°$.



Determine $\cos v$ expressed in t. _______________________ (0/0/1)

Part C: Digital resources are not allowed. Do your solutions on separate sheets of paper.

12. Olle and Olga sell chanterelles and are considering raising the kilo price of the chanterelles in order to increase the daily income. They have found that the daily income as a function of the increase in price is given by

$f(x) = -0.1x^2 + 5x + 3000$

where $f(x)$ is the daily income in SEK and x is the increase in price in SEK/kg.

Calculate, by using the derivative, what increase in price x that gives the largest daily income. (2/0/0)

13. Calculate

a) $\displaystyle\int_1^2 4x^3\,\mathrm{d}x$ (2/0/0)

b) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (0/2/0)

14. Determine $f''(4)$ if $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

Give the answer on the simplest form. (0/2/0)

15. What must be true in order for the line $y = f(x)$ to touch the curve $y = g(x)$ at the point where $x = a$? (0/0/2)

16.

A unit fraction is a fraction where the numerator is 1 and the denominator is a positive integer, that is $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ and so on. The Egyptians used unit fractions in their calculations. Instead of writing $\frac{5}{6}$ they wrote the fraction as a sum of different unit fractions: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

The fraction $\frac{2}{3}$ can be written as the sum of three unit fractions that satisfies the conditions:

- The second unit fraction has a denominator which is 3 times as large as the numerator of the first unit fraction.
- The third unit fraction has a numerator which is 1 less than the numerator of the first unit fraction.

Write down an equation and show by solving this that there is only one way to write the fraction $\frac{2}{3}$ as a sum of three unit fractions, if the conditions are satisfied. (0/0/3)

Part D	Problems 17-26 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital resources, formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 65 consisting of 24 E-, 23 C- and 18 A-points.

Level requirements for test grades
E: 18 points
D: 28 points of which 8 points on at least C-level
C: 36 points of which 15 points on at least C-level
B: 46 points of which 7 points on A-level
A: 55 points of which 12 points on A-level

The number of points you can have for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge level(s) (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled *"Only answer is required"* you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

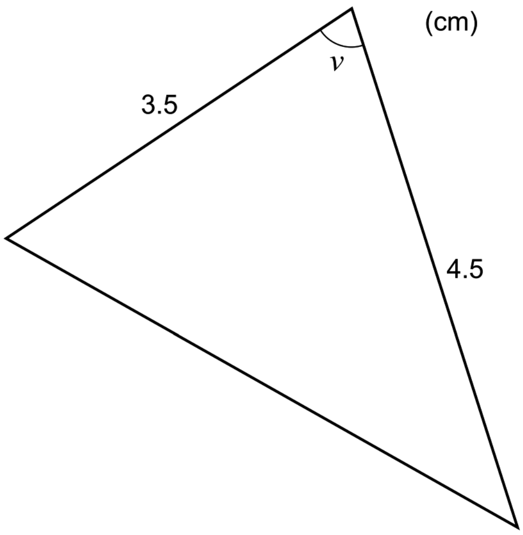
Name: ____________________

Date of birth: ____________________

Educational programme: ____________________

Part D: Digital resources are allowed. Do your solutions on separate sheets of paper.

17. Determine the acute angle v so that the area of the triangle is 7.0 cm^2. (2/0/0)

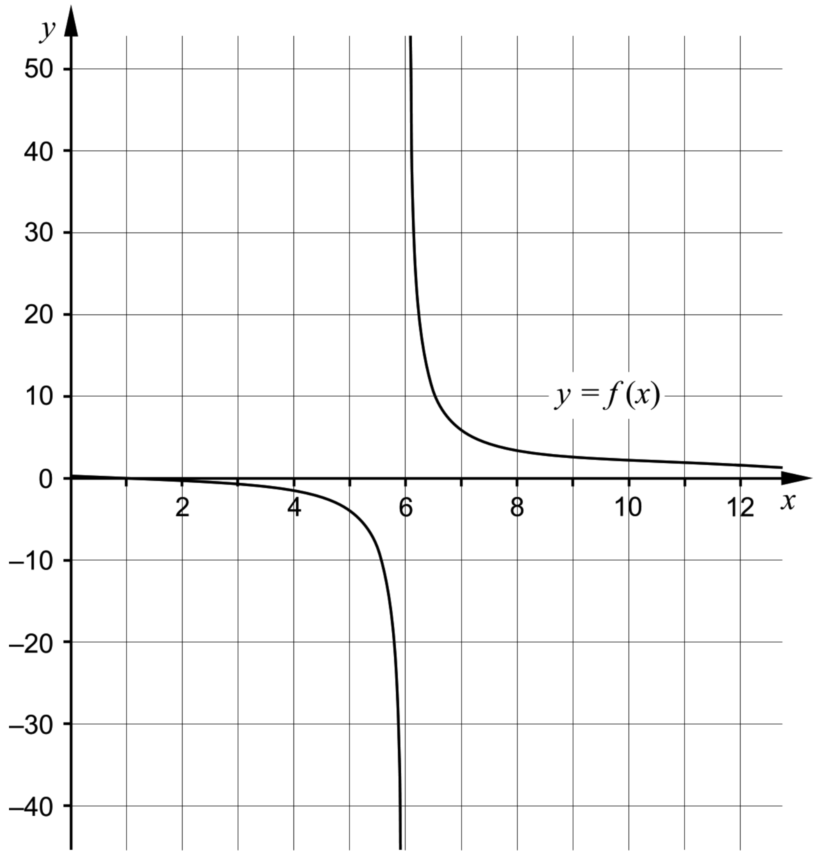


18. In Sweden we eat more and more pasta. According to a simplified model, the consumption of pasta in Sweden can be described by the exponential function: $P = 0.791 \cdot e^{0.0526 \cdot t}$
where P is the yearly pasta consumption in kg per person and t is the time in years after 1960.

a) Assume that the pasta consumption continues to increase according to the model. Determine in what year the yearly pasta consumption will be 15 kg per person. (2/0/0)

b) The model has corresponded well with reality from 1960 to today. Evaluate how well the model will correspond to reality at the end of this century. (2/0/0)

19. Sofia draws the graph of $f(x) = \dfrac{x-1}{x-6}$, see figure below.



a) Sofia claims that: "The largest value is found when $x = 6$"
Is she right? Justify. (1/0/0)

b) Sofia claims that: "For $x > 6$ the smallest value of the function is 1"
Is she right? Justify. (0/1/1)

20. Kalle is going to solve the following problems:

a) Find all antiderivatives of $f(x) = x^2$

b) Calculate $\int_0^2 x^2 \mathrm{d}x$

Below you can see his correct solution:

a) $f(x) = x^2$

$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ ANSWER: $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$

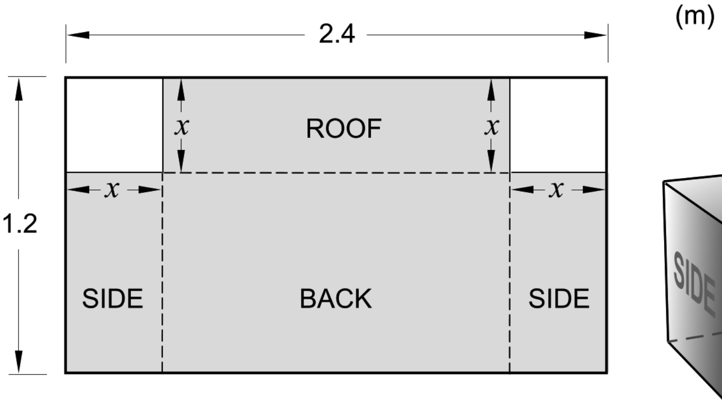
b) $\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$ ANSWER: $\frac{8}{3}$

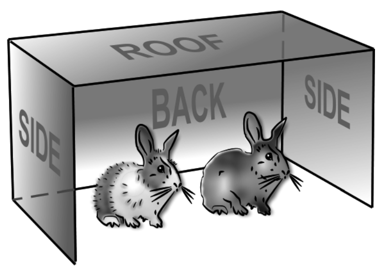
When he determines all antiderivatives in the a)-task he adds a constant *C*. Explain why he does not have to add a constant *C* when calculating the integral in the b)-task.

(1/1/0)

21. Kajsa has a thin iron sheet that measures 2.4 m ×1.2 m. She will make a wind shield for her rabbits out of the iron sheet.

The wind shield will consist of a roof, two sides and a back. Kajsa will cut out two squares from the iron sheet and then fold it into a wind shield. Kajsa wants the wind shield to have as large volume as possible. Assume that the pieces she will cut out have the length *x* metres where $0 < x < 1.2$
See figure.



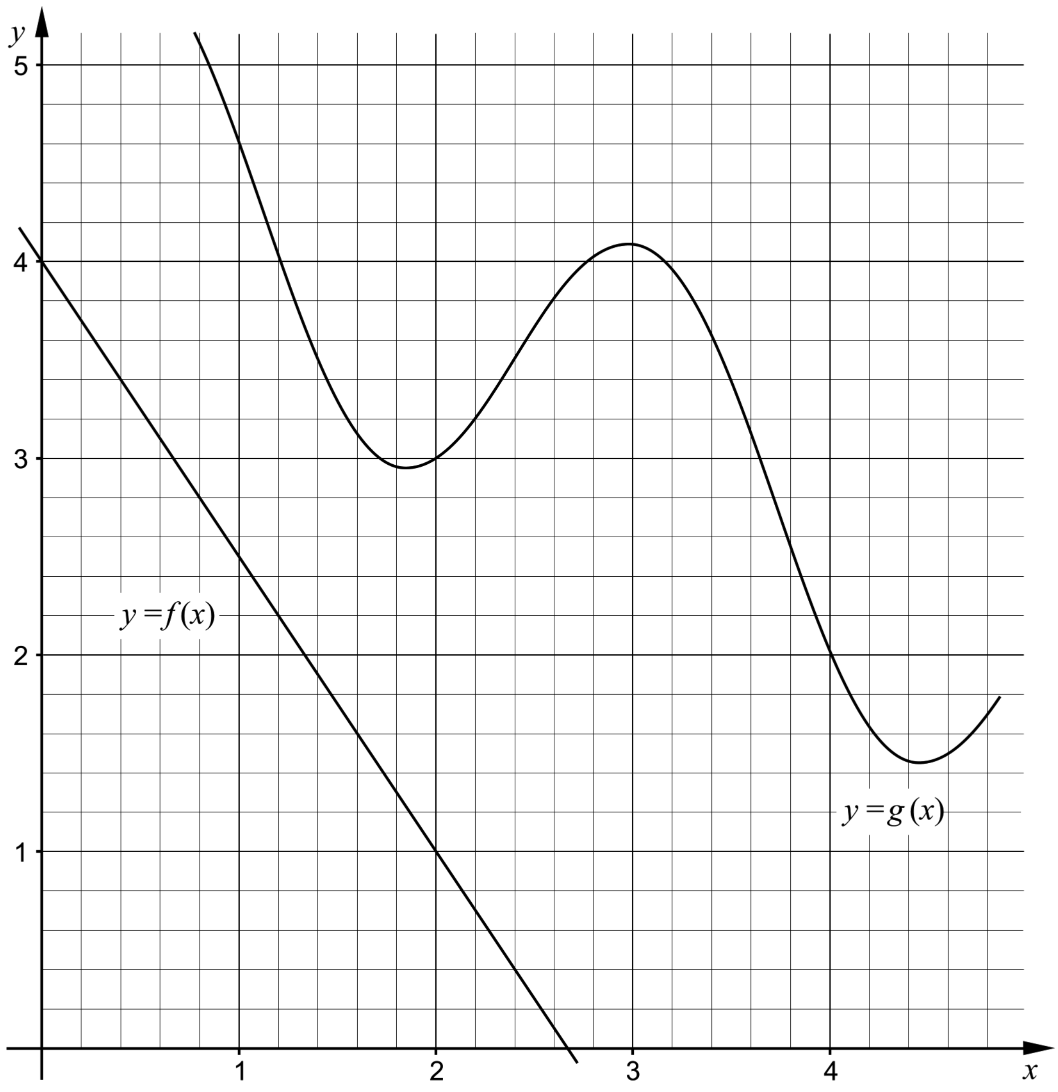


Determine *x* so that the wind shield will have as large volume as possible. (0/3/0)

22. The graph of $f(x) = x^4 - 4x$ has a tangent at point P.
The tangent has the gradient -17.5
Determine the x-coordinate of point P. (0/2/0)

23. In the triangle ABC the angle $B = 25°$ and the side BC is twice as long as side AC. Calculate angle A. (0/3/0)

24. The figure shows the graphs of the functions f and g.



It holds for the function h that $h(x) = f(x) - g(x)$.
Determine $h'(2)$. (0/0/2)

25. It holds for a polynomial function f that:

- $f''(x) = -2$ for all x
- $f(1) = 5$
- $f(2) = 3$

Determine the function f. (0/0/2)

26. The number of bacteria in a bacterial cultivation increases exponentially with time. At 16.00 the number of bacteria is 20 000 and the growth rate is then 5 000 bacteria/hour.

Determine how many bacteria there were in the bacterial cultivation at 12.00 (0/0/3)

To the student - Information about the oral part

You will be given a problem that you will solve in writing, and then you will present your solution orally. If you need, you can ask your classmates or your teacher and use your textbook for help when solving the problem. Your oral presentation starts with you presenting what the problem is about and then you describe and explain your solution. You must present all steps in your solution. However, if you have done the same calculation several times (for example in a table) it might be sufficient if you present some of the calculations. Your presentation should take a maximum of 5 minutes, and be held to a smaller group of your classmates and one or more teachers.

The problem given to you should, on the whole, be solved algebraically. You might need a calculator to do some of the calculations but, when presenting your solution, you should avoid referring to the use of your calculator for drawing graphs and/or symbolic handling (if that is the type of calculator you are using).

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use mathematical terminology.

How complete, relevant and structured your presentation is
Your presentation must contain the necessary parts in order for a listener to follow and understand your thoughts. What you say should be in a suitable order and be relevant. The listener must understand how calculations, descriptions, explanations and conclusions are connected with each other.

How well you describe and explain the train of thought behind your solution
Your presentation should contain both descriptions and explanations. To put it simple, a description answers the question *how* and an explanation answers the question *why*. You describe something when you for instance tell *how* you have done a calculation. You explain something when you for instance justify *why* you could use a certain formula.

How well you use mathematical terminology
In your presentation you should use a language that contains mathematical terms, expressions and symbols, suitable for the problem you have solved.

Mathematical terms are for example words like “exponent”, “function” and “graph”.

An example of a mathematical expression is that x^2 is read “x to the power 2” or “x squared”. Some examples of mathematical symbols are π and $f(x)$, which are read “pi” and “f of x”.

Problem 1.

Name:________________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use mathematical terminology.

Let $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x$

Determine the extreme points of the function. Then use these to sketch the graph of the function.

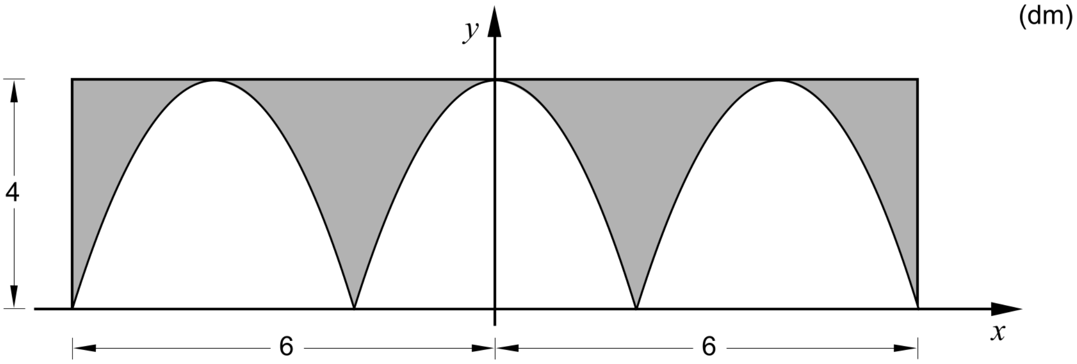
Problem 2.

Name:________________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use mathematical terminology.

The figure shows a rectangular border with a pattern consisting of three similar parabolas. The border is 4 dm high and 12 dm long. Calculate the area of the grey region.

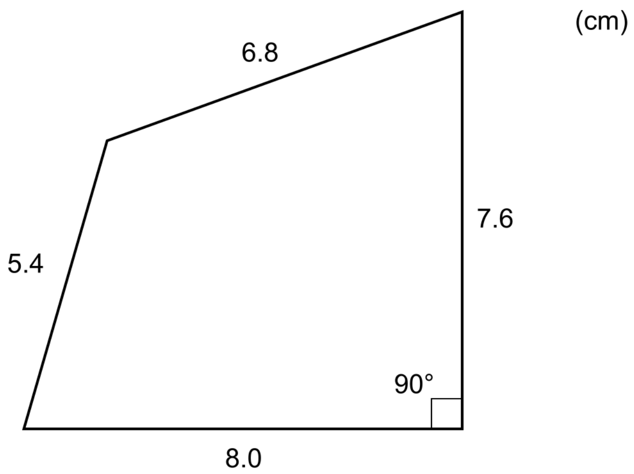


Problem 3.

Name:________________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:
- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use mathematical terminology.

Calculate the area of the quadrangle.

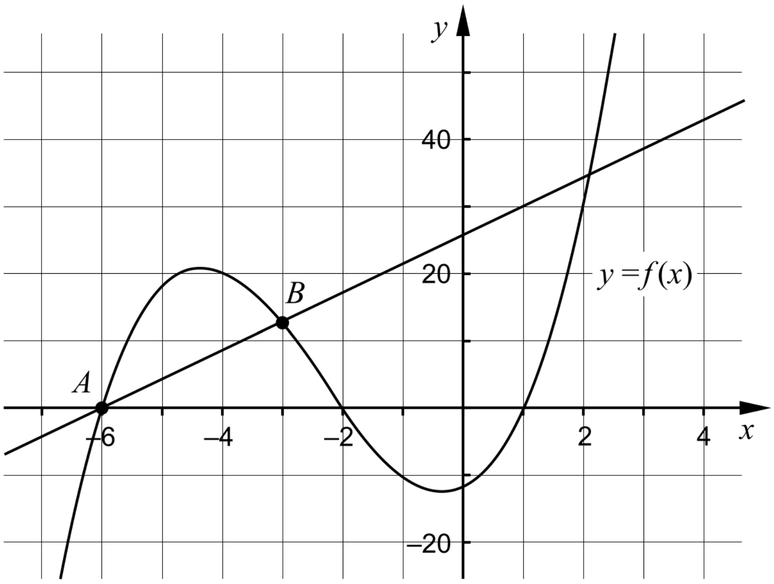


Problem 4.

Name:________________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:
- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use mathematical terminology.

The figure shows the graph of $f(x) = x^3 + 7x^2 + 4x - 12$ and a straight line. These intersect at the points A and B with x-coordinates -6 and -3, see figure.
Where on the graph of f are there tangent lines that are parallel to the given line?



Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	**E**	**C**	**A**	**Max**
Fullständighet, relevans och struktur Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.	Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig. (1/0/0)		Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår. Redovisningen är välstrukturerad. (1/0/1)	(1/0/1)
Beskrivningar och förklaringar Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.	Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar. Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad. (1/0/0)		Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar. (1/0/1)	(1/0/1)
Matematisk terminologi Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen. (1/0/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen. (1/1/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen. (1/1/1)	(1/1/1)
Summa				(3/1/3)

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar
Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … 1 E_R, 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga
Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för provbetyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=,\ \neq,\ <,\ >,\ \leq,\ \geq,\ \approx,\ \pm,\ \sqrt{\ },\ f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ x,\ y,\ (\ ),\ [\ ],\ \int \mathrm{d}x$, bråkstreck, index, lim, VL, HL, symbol för vinkel, gradtecken
Termer	t.ex. absolutbelopp, cirkel, enhetscirkel, polynom, rationellt uttryck, kontinuerlig/diskret funktion, rät linje, andragrads-/polynom-/potens-/exponentialfunktion, funktionsvärde, definitions-/värdemängd, punkt, intervall, område, koordinat, koordinatsystem, graf, kurva, skärningspunkt, nollställe, symmetrilinje, lutning, riktningskoefficient, ändpunkt, sekant, tangent, ändringskvot, förändringshastighet, gränsvärde, derivata, andraderivata, teckenschema, växande/avtagande, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, primitiv funktion, integral, talet e, naturlig logaritm
Hänvisningar	t.ex. till derivatans definition, räta linjens ekvation, tangentens ekvation, cirkelns ekvation, enhetscirkeln, areasatsen, cosinussatsen, sinussatsen, definitionen för sinus
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3c i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 18a_1 och 18a_2 den första respektive andra poängen i uppgift 18a.

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
A	M_1				1								
	M_2												1
	M_3				1								
	M_4												1
	M_5				1								
	M_6								1				
	M_7												1
B	1a		1										
	1b		1										
	2	1											
	3a	1											
	3b	1											
	4a	1											
	4b	1											
	5a		1										
	5b						1						
	5c						1						
	6_1	1											
	6_2							1					
	7_1					1							
	7_2					1							
	8_1					1							
	8_2					1							
	9					1							
	10									1			
	11											1	
C	12_1		1										
	12_2		1										
	13a_1		1										
	13a_2		1										
	13b_1						1						
	13b_2						1						
	14_1						1						
	14_2						1						
	15_1									1			
	15_2												1
	16_1												1
	16_2												1
	16_3												1

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	17_1			1									
	17_2			1									
	18a_1			1									
	18a_2			1									
	18b_1			1									
	18b_2			1									
	19a				1								
	19b_1								1				
	19b_2												1
	20_1				1								
	20_2								1				
	21_1							1					
	21_2							1					
	21_3								1				
	22_1							1					
	22_2							1					
	23_1							1					
	23_2							1					
	23_3								1				
	24_1											1	
	24_2											1	
	25_1											1	
	25_2											1	
	26_1											1	
	26_2											1	
	26_3												1
	Total	**6**	**7**	**6**	**5**	**5**	**6**	**7**	**5**	**2**	**0**	**7**	**9**
Σ	**65**	**24**				**23**				**18**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3c i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

Del-prov	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma3c																
					Aritmetik, algebra och geometri				Samband och förändring										Problem-lösning		
		E	C	A	A1	A3	A4	A5	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	P1	P3	P4
A		3	1	3																	
B	1a	1	0	0							X	X									
	1b	1	0	0							X	X									
	2	1	0	0		X															
	3a	1	0	0					X												
	3b	1	0	0					X												
	4a	1	0	0													X	X			
	4b	1	0	0							X			X							
	5a	1	0	0	X																
	5b	0	1	0	X																
	5c	0	1	0	X																
	6	1	1	0			X												X		
	7	0	2	0						X	X				X	X					
	8	0	2	0	X																
	9	0	1	0							X										
	10	0	0	1					X												
	11	0	0	1			X												X		
C	12	2	0	0							X	X		X	X						
	13a	2	0	0													X	X			
	13b	0	2	0													X	X			
	14	0	2	0							X	X		X							
	15	0	0	2							X					X					
	16	0	0	3	X																
D	17	2	0	0				X											X		
	18a	2	0	0									X						X	X	
	18b	2	0	0									X						X	X	
	19a	1	0	0	X										X						
	19b	0	1	1	X				X						X						
	20	1	1	0													X	X			
	21	0	3	0	X					X	X	X			X	X			X	X	
	22	0	2	0	X						X	X				X			X		
	23	0	3	0				X											X		
	24	0	0	2							X	X				X			X		
	25	0	0	2	X						X				X		X		X		
	26	0	0	3							X	X	X	X	X	X			X	X	
Total		24	23	18																	

Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 65 poäng varav 24 E-, 23 C- och 18 A-poäng. Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla fyra delprov, det vill säga Delprov A, B, C och D.

Kravgräns för provbetyget
E: 18 poäng
D: 28 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 36 poäng varav 15 poäng på minst C-nivå
B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Bedömningsformulär

Elev:____________________________ Klass:________________ Provbetyg: ____________

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
A	M_1												
	M_2												
	M_3												
	M_4												
	M_5												
	M_6												
	M_7												
B	1a												
	1b												
	2												
	3a												
	3b												
	4a												
	4b												
	5a												
	5b												
	5c												
	6_1												
	6_2												
	7_1												
	7_2												
	8_1												
	8_2												
	9												
	10												
	11												
C	12_1												
	12_2												
	13a_1												
	13a_2												
	13b_1												
	13b_2												
	14_1												
	14_2												
	15_1												
	15_2												
	16_1												
	16_2												
	16_3												

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	17_1												
	17_2												
	18a_1												
	18a_2												
	18b_1												
	18b_2												
	19a												
	19b_1												
	19b_2												
	20_1												
	20_2												
	21_1												
	21_2												
	21_3												
	22_1												
	22_2												
	23_1												
	23_2												
	23_3												
	24_1												
	24_2												
	25_1												
	25_2												
	26_1												
	26_2												
	26_3												
	Total												
Σ													

	Total	**6**	**7**	**6**	**5**	**5**	**6**	**7**	**5**	**2**	**0**	**7**	**9**
Σ	**65**	**24**				**23**				**18**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Delprov B

1.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar ($f'(x) = 12x^2 + 7$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar ($f'(x) = 2e^{2x}$)	+1 E_P
2.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (6)	+1 E_B
3.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar (Alternativ B och E)	+1 E_B
b)	Korrekt svar (Alternativ D och F)	+1 E_B
4.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar (6) *Kommentar:* Svaret 6 a.e. ges en begreppspoäng på E-nivå.	+1 E_B
b)	Korrekt svar ($-0,25$)	+1 E_B
5.		**Max 1/2/0**
a)	Korrekt svar ($49x$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar $\left(\dfrac{x}{2}\right)$	+1 C_P
c)	Korrekt svar (-1)	+1 C_P

6. **Max 1/1/0**

Korrekt svar ($a = 5$ och $b = 3$) +1 E_B

Korrekt svar ($r = \sqrt{8}$) +1 C_{PL}

Kommentar: Bedömningen till denna uppgift avviker från de beskrivna bedömningsmodellerna på sidan 3. Här kan problemlösningspoängen delas ut oavsett om begreppspoängen har delats ut eller inte.

7. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, skiss som visar insikt om att grafen har en minimipunkt då $x = 0$ och/eller en terrasspunkt då $x = 5$ +1 C_B

med i övrigt godtagbart skissad graf +1 C_B

Kommentar: Skiss som innehåller ytterligare extrempunkter ges noll poäng.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

8. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, anger ett rationellt uttryck som uppfyller det första *eller* det andra villkoret, t.ex. $\frac{-5}{x-10}$ +1 C_B

med båda villkoren uppfyllda $\left(\text{t.ex.} \frac{x+5}{x-10}\right)$ +1 C_B

9. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (Alternativ A) +1 C_B

10. **Max 0/0/1**

Korrekt svar $\left(\text{t.ex. } f(x) = 3 + \frac{1}{x}\right)$ +1 A_B

11. **Max 0/0/1**

Korrekt svar $\left(\cos v = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ +1 A_{PL}

Kommentar: Även svaret $\cos v = \cos(\arctan t)$ är korrekt.

Delprov C

12. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer derivatans nollställe korrekt, $x = 25$ +1 E_P

med godtagbar verifiering av maximum med korrekt svar (25 kr/kg) +1 E_P

Kommentar: Ett svar med felaktig eller utebliven enhet godtas.

13. **Max 2/2/0**

a) Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (15) +1 E_P

b) Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $(0{,}5)$ +1 C_P

14. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, bestämmer $f''(x)$ korrekt, t.ex. $f''(x) = \dfrac{-0{,}5 \cdot 0{,}5x^{-1{,}5}}{2}$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(-\dfrac{1}{64}\right)$ +1 C_P

15. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, anger att funktionerna ska ha samma lutning och samma funktionsvärde *samt* anger tydligt för minst en av dessa att det måste gälla i den punkt där $x = a$ +1 A_B

med korrekt svar uttryckt exakt i ord (t.ex. ”De måste ha samma funktions-värde för $x = a$ och samma lutning för $x = a$.”)
eller med symboler ($g'(a) = f'(a)$ och $g(a) = f(a)$) +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

16. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, tecknar ekvationen korrekt, t.ex. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2}{3}$ +1 A_R

med korrekt lösning av ekvationen, $x_1 = \dfrac{1}{2}$ och $x_2 = 4$ +1 A_R

med godtagbart slutfört bevis som visar att det endast finns ett sätt att skriva stambråket eftersom den ena lösningen till ekvationen inte ger ett stambråk +1 A_R

Delprov D

17. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, tecknar ekvationen $\frac{3{,}5\cdot 4{,}5}{2}\sin v = 7$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($63°$) +1 E_{PL}

18. **Max 4/0/0**

a) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $0{,}791\cdot e^{0{,}0526\cdot t} = 15$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (år 2016) +1 E_M

b) Godtagbar ansats till utvärdering av modellen, t.ex. beräknar $P(140)$ +1 E_M

med godtagbar kommentar som visar insikt om att modellen inte stämmer eftersom pastamängden blir orimligt hög +1 E_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

19. **Max 1/1/1**

a) Godtagbart enkelt resonemang där det framgår att Sofia har fel, baserat på att största värde saknas *eller* baserat på att funktionen inte är definierad då $x = 6$ +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

b) Godtagbar ansats, påbörjar ett välgrundat resonemang, t.ex. tecknar ekvationen
$1 = \frac{x-1}{x-6}$ +1 C_R

med godtagbart slutfört välgrundat och nyanserat resonemang som visar att funktionsvärdet aldrig kan bli 1 och att Sofia därför har fel +1 A_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

20. **Max 1/1/0**

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang där det *påstås att* konstanten *C* försvinner vid integralberäkningen och därför inte behöver tas med. 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, där det *visas att* eller *förklaras varför* konstanten *C* försvinner vid integralberäkningen och därför inte behöver tas med. 1 E_R och 1 C_R	

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

21. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, tecknar volymfunktionen $V(x) = x(2{,}4 - 2x)(1{,}2 - x)$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning, inklusive godtagbar verifiering av maximum, med godtagbart svar ($x = 0{,}4$) +1 C_M

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

22. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $4x^3 - 4 = -17{,}5$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $(-1{,}5)$ +1 C_{PL}

23. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, genomför en specialfallslösning med godtagbar bestämning av båda vinklarna *eller* genomför en generell lösning med godtagbar bestämning av en vinkel +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar *generell* lösning med godtagbart svar ($58°$ och $122°$) +1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Kommentar: I de allmänna kraven för skriftlig kommunikativ förmåga på sidan 4 krävs att lösningen i huvudsak är korrekt. I denna uppgift kan dock kommunikationspoäng utdelas vid generell lösning även om endast en vinkel bestäms. Detta beror på att bestämningen av den andra vinkeln utgör en kommunikationsmässigt liten del av lösningen.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

24. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, visar insikt om hur $h'(2)$ kan bestämmas,
t.ex. anger att $h'(2) = f'(2) - g'(2)$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning, som inkluderar korrekt bestämning av linjens lutning $\left(-\frac{3}{2}\right)$ och godtagbar bestämning av tangentens lutning (t.ex. 0,67),
med godtagbart svar (t.ex. $-2{,}17$) +1 A_{PL}

25. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, bestämmer $f(x)$ på allmän form, t.ex. $f(x) = -x^2 + Cx + D$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($f(x) = -x^2 + x + 5$) +1 A_{PL}

26. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, tecknar relevanta samband, t.ex. $\begin{cases} 20000 = N_0 \mathrm{e}^{4 \cdot k} \\ 5000 = N_0 k \mathrm{e}^{4 \cdot k} \end{cases}$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (7400 bakterier) +1 A_M

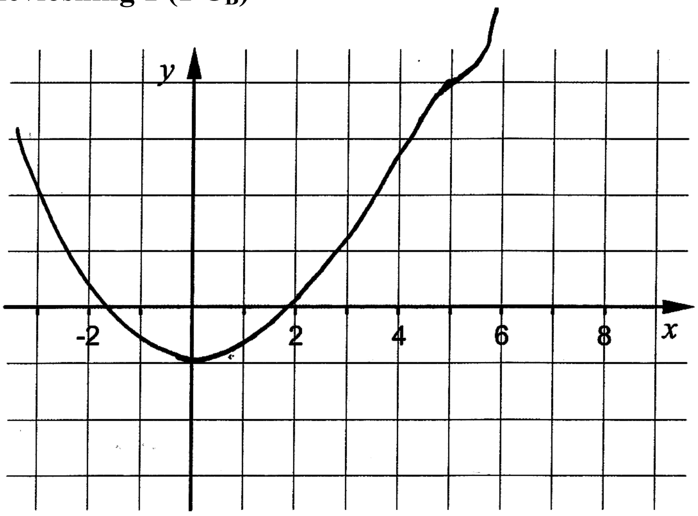
Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Bedömda elevlösningar

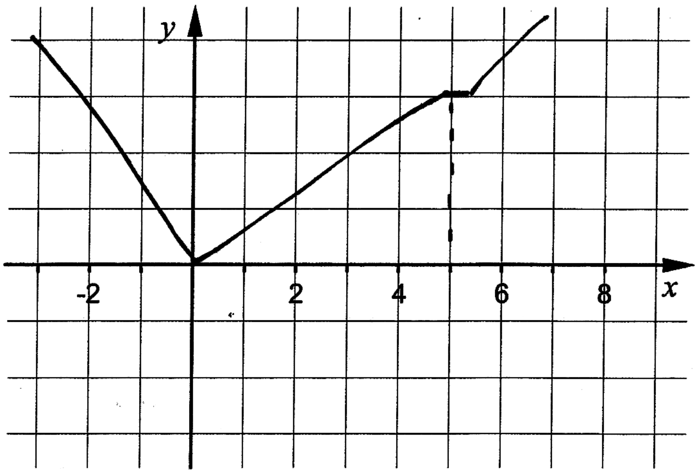
Uppgift 7

Elevlösning 1 (1 C_B)



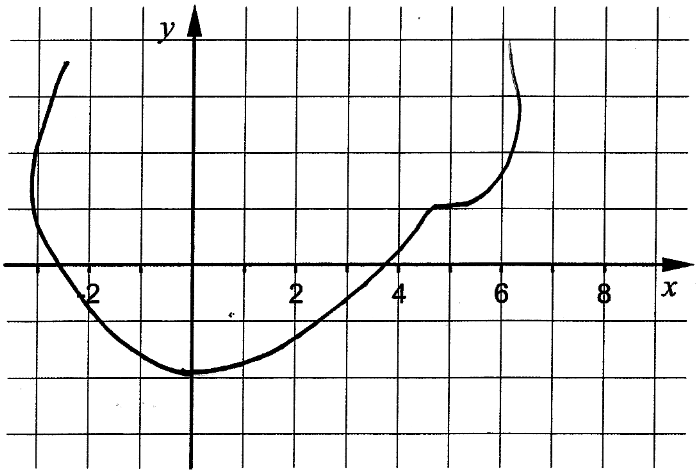
Kommentar: Elevlösningen visar en skissad graf med en minimipunkt där $x = 0$. Vid $x = 5$ är terrasspunkten allt för otydligt skissad för att godtas. Sammantaget ges lösningen en begreppspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (1 C_B)



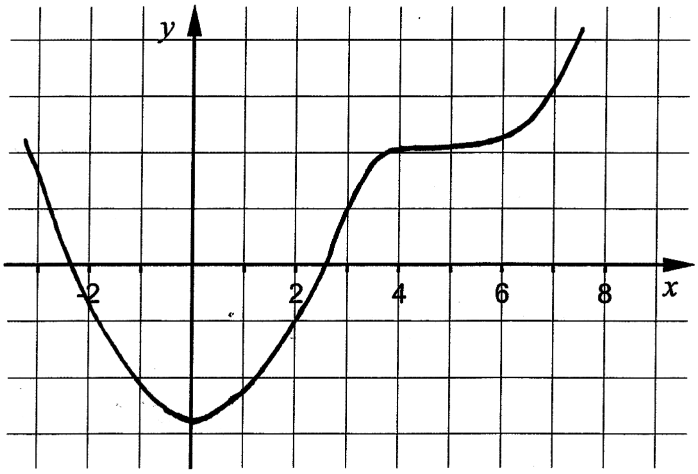
Kommentar: Elevlösningen visar en skissad graf med en minimipunkt där $x = 0$ och en terrasspunkt där $x = 5$. I partiet kring minimipunkten bedöms grafen alltför spetsig för att känneteckna en polynomfunktion och lösningen anses därmed inte uppfylla kraven för den andra begreppspoängen på C-nivå. Sammantaget ges elevlösningen en begreppspoäng på C-nivå.

Elevlösning 3 (1 C_B)



Kommentar: Elevlösningen visar en skissad graf med en minimipunkt där $x = 0$ och en terrasspunkt där $x = 5$. Grafen bedöms inte godtagbart ritad eftersom den inte visar en funktion. Sammantaget ges lösningen en begreppspoäng på C-nivå.

Elevlösning 4 (2 C_B)



Kommentar: Elevlösningen visar en skissad graf med en minimipunkt där $x = 0$ och en nätt och jämt godtagbar terrasspunkt. Grafen bedöms i övrigt som godtagbar och sammantaget ges lösningen två begreppspoäng på C-nivå.

Uppgift 15

Elevlösning 1 (0 poäng)

Att $y=f(x)$ ska ha samma lutning, dvs k-värde
som derivatan av $y=g(x)$
Sen måste gälla att de har samma y-värde
när de befinner sig i punkten a

Kommentar: Villkoret för lika funktionsvärden är godtagbart angivet, däremot är det otydligt om linjen ska ha samma lutning som funktionens derivata eller om linjen ska ha samma lutning som funktionen. På grund av denna otydlighet uppfylls inte kraven för en godtagbar ansats.

Elevlösning 2 (1 A_B och 1 A_K)

För att linjen ska tangera kurvan måste
$y=y$ dvs $f(x)=g(x)$ i $x=a$
Linjens lutning måste även vara lika stor
som kurvans i $x=a$, annars blir det en
sekant

Kommentar: Elevlösningen ger i ord och symboler en godtagbar förklaring till att både funktionsvärden och lutningen för de båda funktionerna ska vara lika då $x=a$. Sammantaget ges lösningen en begreppspoäng och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 3 (1 A_B och 1 A_K)

För att linjen $f(x)=kx+m$ ska tangera
kurvan $g(x)$ i punkten a måste följande
krav uppfyllas:

- $f(a)=g(a)$ — Båda funktionerna måste mötas i punkten a
  och
- $g'(a)=k$ i $f(x)$ — De måste ha samma lutning annars skär de bara varandra

Kommentar: I elevlösningen anges det inte uttryckligen att $g'(a)=f'(a)$ men eftersom k definierats som linjens lutning får villkoret $g'(a)=k$ anses betyda detsamma som $g'(a)=f'(a)$. Sammantaget ges elevlösningen en begreppspoäng och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 4 (1 A_B och 1 A_K)

$f'(a) = g'(a)$ och $f(a) = g(a)$

Kommentar: Elevlösningen visar exakt med matematiska symboler vilka två villkor som gäller. Sammantaget ges elevlösningen en begreppspoäng och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 18b

Elevlösning 1 (0 poäng)

I slutet av detta $P = 0,791 \cdot e^{0,0525 \cdot 100} \Rightarrow P = 0,791 \cdot e^{5,25}$

århundrande kommer den $P = 150,74$ kg

inte att stämma så bra då vi får för höga värden

Kommentar: Elevlösningen visar inte en godtagbar ansats eftersom modellen utvärderas i mitten av detta århundrade och inte i slutet. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (1 E_M)

$1960 + 139 = 2099$

$0,791 \cdot e^{0,0525 \cdot 139} \approx 1168$

Svar: Enligt modellen är konsumtionen 1168 kg pasta per person och år året 2099.
Vilket inte kan stämma

Kommentar: Elevlösningen visar en godtagbar ansats genom att $P(139)$ beräknas vid utvärdering av modellen. Däremot framgår det inte *varför* pastamängden är orimlig, dvs. att den är för hög. Lösningen ges den första modelleringspoängen på E-nivå.

Elevlösning 3 (2 E_M)

År 2099:

$t = 2099 - 1960 = 139$

$P = 0{,}791 \cdot e^{0{,}0525 \cdot 139} \approx 1168$ kg/person

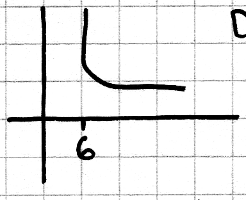
Modellen stämmer inte för slutet av 2000-talet
Värdet blir för högt

Kommentar: Elevlösningen visar en godtagbar utvärdering av modellen. Lösningen ges två modelleringspoäng på E-nivå.

Uppgift 19a

Elevlösning 1 (1 E_R)

Sofia har fel eftersom att x-värdet
aldrig når 6, den snuddar ifrån
6:an



Den når aldrig fram
till punkt 6.

x-värdet blir aldrig 6.

Kommentar: Elevlösningen visar ett resonemang som beskriver att funktionen inte är definierad för $x = 6$ även om det inte anges explicit. Lösningen bedöms nätt och jämt uppfylla kraven för resonemang på E-nivå.

Elevlösning 2 (1 E_R)

$f(6) = \frac{5}{0}$ Svaret är odefinierat. hon har fel.

Elevlösning 3 (1 E_R)

När x=6 är inte y bestämt
eftersom att grafen är diskont-
nuerlig, vilket betyder att y är ej
bestämt när x=6; så nej hon har inte rätt

Elevlösning 4 (1 E_R)

Nej, x kommer aldrig bli 6. Man kan inte dela
något med noll

Kommentar: Elevlösning 2-4 visar exempel på godtagbara enkla resonemang som uppfyller kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 19b

Elevlösning 1 (0 poäng)

Nej, i x-led närmar sig y-värdet 1, men det kommer aldrig att uppnå det, alltså kan det minsta värdet närma sig 1 men det kommer aldrig att att vara 1

Kommentar: Elevlösningen visar ett resonemang som inte kan anses vara välgrundat eftersom det inte styrks av exempelvis beräkningar. Dessutom antyds att minsta värde existerar. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (1 C_R)

$$1 = \frac{x-1}{x-6}$$

$$x-6 = x-1$$

$$0x = 5 \quad ???$$

Kommentar: Elevlösningen visar en godtagbar ansats och uppfyller därmed kraven för en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösning 3 (1 C_R och 1 A_R)

Funktionens värde när $x>6$ kan inte bli 1

Vid en prövning $f(x)=1$ ger det $1 = \frac{x-1}{x-6}$

$$x-6 = x-1$$

$$x = x+5$$

vilket är omöjligt

Däremot så närmar sig funktionsvärdet mot 1 men det kommer aldrig ner till 1.

Kommentar: Det inledande resonemanget visar varför Sofias påstående är felaktigt och bedöms därför uppfylla kraven för resonemangspoängen på C- och A-nivå. Kommentaren i slutet av lösningen ”Däremot så närmar sig funktionsvärdet…” visar på förståelse men behövs inte för att vederlägga Sofias påstående.

Elevlösning 4 (1 C_R och 1 A_R)

För att det ska kunna bli 1 så måste
både täljare och nämnare vara lika stora
$x-1 = x-6$ ger inget svar och därför
kan inte värdet bli 1.
hon har fel.

Kommentar: Elevlösningen visar ett resonemang som bygger på att täljare och nämnare aldrig kan vara lika stora och att Sofias påstående därför är felaktigt. Lösningen uppfyller därmed kraven för resonemangspoäng på C- och A-nivå.

Uppgift 20

Elevlösning 1 (0 poäng)

I a) uppgiften behövde han bestämma
alla primitiva funktioner varav konstanten C
behövs för att kunna beskriva fler än en
primitiv funktion.
Men i uppgift b) var uppgiften ~~att~~ beräkna
integralen till den primitiva funktionen.
$\frac{x^3}{3}$ är en av de primitiva funktionerna till x^2
och fungerar därför som funktion till integral
beräkningen. C-konstanten är en konstant
och har därför inte heller någon påverkan
på integralens värde. Eftersom integreringen
går med avseende på x är C ointressant

Kommentar: I slutet av elevlösningen är förklaringen till varför konstanten *C* inte behövs att: ”*C*-konstanten är en konstant och har därför inte heller någon påverkan på integralens värde. Eftersom integreringen går med avseende på *x* är *C* ointressant.”. Denna förklaring anses alltför otydlig för att uppfylla kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösning 2 (1 E_R och 1 C_R)

Vid integralberäkning behöver man inte lägga till C eftersom de ändå tar ut varandra i detta fall.

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + C\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} + C - \left(\frac{0^3}{3} + C\right)$$

$$\frac{2^3}{3} + C - C = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$$

det visar att oavsett om C läggs till i detta fall blir svaret det samma.

Kommentar: I elevlösningen bedöms förklaringen ”Vid integralberäkning behöver man inte lägga till *C* eftersom de ändå tar ut varandra i detta fall” motsvara en resonemangspoäng på E-nivå. Eftersom det i lösningen även *visas* på ett godtagbart sätt hur konstanterna *C* tar ut varandra bedöms lösningen även uppfylla kraven för en resonemangspoäng på C-nivå.

Uppgift 21

Elevlösning 1 (2 C_M)

Bas = $x(2,4-2x)$

Höjd = $(1,2-x)$

$Bh = V$

$x(2,4-2x) = (2,4x-2x^2)$

$(2,4x-2x^2)(1,2-x) = 2,88x - 2,4x^2 - 2,4x^2 + 2x^3$

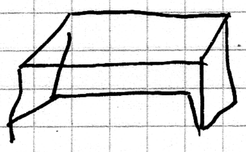
$2,88x + 2x^3 - 4,4x^2 = V_{max}$

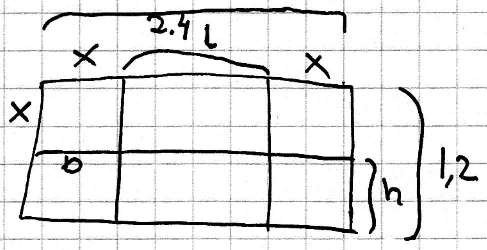
2nd calc max på miniräknaren ger $x = 0,49$

Svar $x = 0,49$ ger maximal volym

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt härledning av funktionsuttrycket. Vid förenklingen på rad sex görs ett fel av lapsuskaraktär, vilket inte påverkar bedömningen. Gällande kommunikation är lösningen något svår att följa då skiss av graf och beteckningar på rad fyra och rad fem saknas. Dessutom betecknas volymfunktionen på rad sex med V_{max} vilket inte är lämpligt. Dessa brister gör att kraven för kommunikationspoäng på C-nivå inte anses uppfyllda. Sammantaget ges elevlösningen två modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C_M och 1 C_K)





tak $= 2{,}4 - x - x = 2{,}4 - 2x$

volym $= b \cdot h \cdot l$

$b = x$

$h = 1{,}2 - x$

$l = 2{,}4 - x - x$

$V(x) = x \cdot (1{,}2 - x) \cdot (2{,}4 - 2x)$

$V(x) = (1{,}2x - x^2)(2{,}4 - 2x)$

$V(x) = 2{,}88x - 2{,}4x^2 - 2{,}4x^2 + 2x^3 =$

$= 2x^3 - 4{,}8x^2 + 2{,}88x$

$V'(x) = 6x^2 - 9{,}6x + 2{,}88$

extrempunkter $V'(x) = 0$

$0 = 6x^2 - 9{,}6x + 2{,}88$

$0 = x^2 - 1{,}6x + 0{,}48$

pq formel $x = \frac{1{,}6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1{,}6}{2}\right)^2 - 0{,}48}$

$x = 0{,}8 \pm 0{,}4$

$x_1 = 0{,}4 \quad x_2 = 1{,}2$

Andraderivata $V''(x) = 12x - 9{,}6$

$V''(0{,}4) = 12 \cdot 0{,}4 - 9{,}6 = -4{,}8$

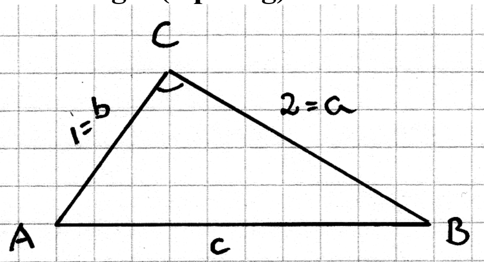
när x är 0,4 får vi en maxpunkt.

Svar Sidan x ska ~~ha~~ vara 0,4 för att få så stor volym som möjligt

Kommentar: Elevlösningen bedöms vara i huvudsak korrekt. När det gäller kommunikation så finns en bristfälligt ritad figur med otydliga beteckningar. Dessutom är det oklart varför $V''(0{,}4) = -4{,}8$ ger ett maximum. Trots dessa brister anses lösningen vara möjlig att följa och förstå. Sammantaget ges elevlösningen två modelleringspoäng på C-nivå samt nätt och jämnt kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 23

Elevlösning 1 (0 poäng)



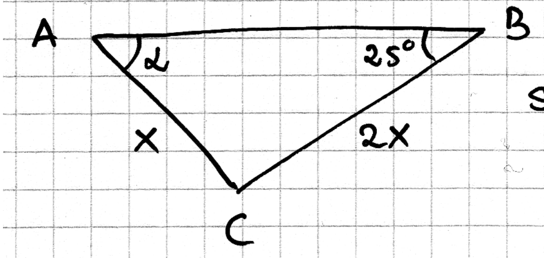
Sinussatsen ger:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \sin A = \frac{\sin B \cdot a}{b}$$

$$A = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 25 \cdot 2}{1}\right) = \underline{\underline{58}}^{\circ}$$

Kommentar: Elevlösningen är inte generell i och med att sidor med längden 1 och 2 ansätts. Om även den andra vinkeln, 122°, hade bestämts hade lösningen bedömts motsvara kraven för den första problemlösningspoängen på C-nivå. I detta fall ges lösningen noll poäng.

Elevlösning 2 (1 C_{PL} och 1 C_K)



Sökt α

Sinussatsen ger

$$\frac{\sin(\alpha)}{2x} = \frac{\sin(25^\circ)}{x}$$

$$\frac{x}{2x} = \frac{\sin(25^\circ)}{\sin(\alpha)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin(25^\circ)}{\sin(\alpha)}$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{2} = \sin(25^\circ)$$

$$\sin\alpha = \sin(25^\circ)\cdot 2$$

$$\alpha = \arcsin(\sin(25^\circ)\cdot 2)$$

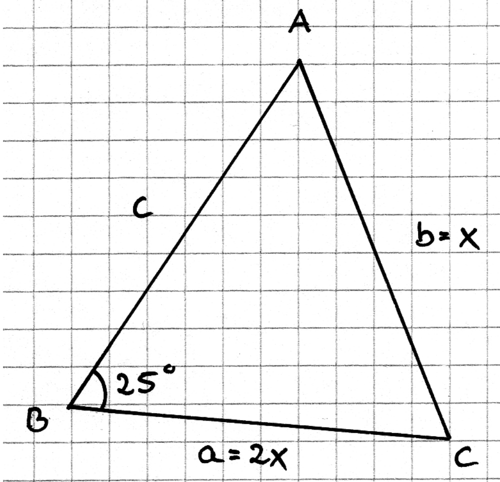
$$\alpha = 57{,}697^\circ$$

Svar $\alpha = 58^\circ$

Kommentar: I elevlösningen används sinussatsen och generella beckningar för att bestämma den ena vinkeln. Gällande kommunikation är lösningen möjlig att följa och förstå och symboler används med viss anpassning till syfte och situation. Visserligen saknas det andra fallet för vinkeln (180° – 58°) men denna del av lösningen bedöms inte tillföra så mycket kommunikationsmässigt. Trots den saknade lösningen ges därmed en kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen en problemlösningspoäng och en kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösning 3 (2 C_{PL} och 1 C_K)

Sinussatsen ger:



$$\frac{\sin A}{2x} = \frac{\sin 25}{x}$$

$$\sin A = \frac{\sin 25}{x} \cdot 2x$$

$$\sin A = \frac{\sin 25 \cdot 2x}{x}$$

$$\sin A = \sin 25 \cdot 2$$

$$A = \sin^{-1}(0{,}85)$$

$$A_1 = 57{,}7°$$

$$A_2 = 122{,}3°$$

$A_1 = 57{,}7°$

$A_2 = 122{,}3°$ A kan vara båda

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften generellt i sin helhet. Gällande kommunikation är lösningen strukturerad och möjligt att följa och förstå. Visserligen saknas motivering till hur vinkeln A_2 bestäms ($A_2 = 180° - A_1$) samt gradtecken och nödvändiga parenteser i samband med ekvationslösningen, men elevlösningen bedöms trots detta nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 26

Elevlösning 1 (2 A_M)

$f(t)$ är bakterie tillväxt

Klockan 12:00 motsvarar $x=0$
Kockan 16:00 motsvarar $x=4$

$f(t)=a\cdot e^{k\cdot 4}$

$f'(4)=5000=a\cdot ke^{k4}$

$a=\frac{5000}{k\cdot e^{k4}}$

$f(4)=20000=a\cdot e^{k\cdot 4}$

$a=\frac{20000}{e^{k\cdot 4}}$

$a=\frac{5000}{ke^{k4}}=\frac{20000}{e^{k4}}$

$\frac{5000}{ke^{k4}}=\frac{20000}{e^{k4}}$

$\frac{5000}{k}=20000$

$5000=20000\cdot k$ $\quad k=\frac{5000}{20000}=0{,}25$

$a\cdot e^{0{,}25\cdot 4}=20000$

$a\cdot e^{1}=20000$

$a=\frac{20000}{e}$ $\quad f(0)=\frac{20000}{e}\cdot e^{0{,}25\cdot 0}$

$f(0)=\frac{20000}{e}=7357{,}6$ bakterier

Svar: Vid odlingens början fanns det 7357 st bakterier

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. När det gäller kommunikation är variabeldefinitionen otydlig eftersom den oberoende variabeln växlar från t till x, tiden saknar enhet och skrivsättet $f(t)=a\cdot e^{k\cdot 4}$ inte är korrekt. Vidare benämns $f(t)$ som ”bakterietillväxt” vilket är otydligt när det rör sig om antalet bakterier som funktion av tiden. Dessutom saknas ett uttryck för $f'(t)$. Elevlösningen anses därmed inte uppfylla kraven för kommunikation på A-nivå. Sammantaget ges elevlösningen två modelleringspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (2 A_M och 1 A_K)

f(t) beskriver antalet bakterier vid tiden t i timmar efter kl 12:00

$f(t) = C \cdot e^{kt}$ förändringskvot

antalet bakterier kl 12:00

16:00 är 4h efter 12:00

$f'(t) = C \cdot k \cdot e^{kt}$

$f'(4) = 5000 = C \cdot k \cdot e^{k \cdot 4}$

$f(4) = 20000 = C \cdot e^{k \cdot 4}$

Vi dividerar f'(4) med f(4) föratt få k

$$\frac{5\cancel{000}}{20\cancel{000}} = \frac{\cancel{C} \cdot k \cdot \cancel{e^{k \cdot 4}}}{\cancel{C} \cdot \cancel{e^{k \cdot 4}}}$$

$k = \frac{1}{4}$

Vi har nu funktionen $f(t) = C \cdot e^{\frac{t}{4}}$

$20\,000 = C \cdot e^{\frac{4}{4}}$

$C = \frac{20000}{e}$

$C = 7357,6 \approx 7360$ bakterier

Det fanns därmed ca 7360 bakterier i odlingen kl 12:00

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften godtagbart i sin helhet och ges därför två modelleringspoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation är lösningen välstrukturerad och innehåller väsentliga och relevanta delar inklusive en tydlig variabeldefinition. Lösningen är dessutom presenterad med ett korrekt matematiskt språk. Elevlösningen uppfyller därmed kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnena.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Kunskapskrav Matematik kurs 3b och 3c

Betyget E Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena **i bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

Betyget D Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

Betyget C Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade** matematiska resonemang och värdera med **nyanserade** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

Betyget B Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

Betyget A Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja**, tillämpa **och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

Centralt innehåll Matematik kurs 3c

Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:

Aritmetik, algebra och geometri

A1	Begreppen polynom och rationella uttryck samt generalisering av aritmetikens lagar för hantering av dessa begrepp.
A3	Begreppet absolutbelopp.
A4	Egenskaper hos cirkelns ekvation och enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp.
A5	Bevis och användning av cosinus-, sinus- och areasatsen för en godtycklig triangel.

Samband och förändring

F7	Orientering kring kontinuerlig och diskret funktion samt begreppet gränsvärde.
F8	Egenskaper hos polynomfunktioner av högre grad.
F9	Begreppen sekant, tangent, ändringskvot och derivata för en funktion.
F10	Härledning och användning av deriveringsregler för potens- och exponentialfunktioner samt summor av funktioner.
F11	Introduktion av talet e och dess egenskaper.
F12	Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av derivatans värde för en funktion.
F13	Algebraiska och grafiska metoder för lösning av extremvärdesproblem inklusive teckenstudium och andraderivatan.
F14	Samband mellan en funktions graf och funktionens första- och andraderivata.
F15	Begreppen primitiv funktion och bestämd integral samt sambandet mellan integral och derivata.
F16	Bestämning av enkla integraler i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.

Problemlösning

P1	Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
P3	Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
P4	Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.