Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankgången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt olika modeller:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga
Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan innehålla något ovidkommande eller sakna något steg. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

Förutom den allmänna beskrivningen av kraven kan ibland mer utförliga beskrivningar ges i samband med de bedömda elevlösningar där kommunikationspoäng förekommer.

Provsammanställning - Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3c i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 7b_1 och 7b_2 den första respektive andra poängen i uppgift 7b.

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del A	M_1				1								
	M_2												1
	M_3				1								
	M_4												1
	M_5				1								
	M_6								1				
	M_7												1
Del B	1	1											
	2	1											
	3	1											
	4	1											
	5a		1										
	5b						1						
	5c						1						
	6					1							
	7a					1							
	7b_1					1							
	7b_2								1				
	8_1					1							
	8_2									1			
	9a	1											
	9b											1	
	10_1									1			
	10_2											1	
Del C	11_1		1										
	11_2		1										
	12_1		1										
	12_2		1										
	12_3		1										
	13a_1			1									
	13a_2			1									
	13b_1							1					
	13b_2							1					
	13b_3								1				
	14a		1										
	14b_1						1						
	14b_2						1						
	15											1	
	16_1					1							
	16_2						1						
	16_3									1			
	16_4												1

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del D	17_1			1									
	17_2			1									
	18a	1											
	18b					1							
	19_1			1									
	19_2			1									
	19_3								1				
	20a_1				1								
	20a_2				1								
	20b_1							1					
	20b_2							1					
	20b_3								1				
	21a				1								
	21b_1								1				
	21b_2								1				
	21b_3												1
	22a			1									
	22b							1					
	22c_1							1					
	22c_2											1	
	23_1									1			
	23_2											1	
	23_3											1	
	24_1												1
	24_2												1
	24_3												1
	25_1								1				
	25_2												1
	25_3												1
	25_4												1
	Total	**6**	**7**	**7**	**6**	**6**	**5**	**6**	**8**	**4**	**-**	**6**	**11**
Σ	**72**	**26**				**25**				**21**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3c i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma3c																
					Aritmetik, algebra och geometri				Samband och förändring										Problem-lösning		
		E	C	A	A1	A3	A4	A5	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	PI	P3	P4
Del A		3	1	3																	
Del B	1	1	0	0		X															
	2	1	0	0	X																
	3	1	0	0	X																
	4	1	0	0			X														
	5a	1	0	0							X	X									
	5b	0	1	0							X	X									
	5c	0	1	0							X	X									
	6	0	1	0					X												
	7a	0	1	0							X					X					
	7b	0	2	0							X					X					
	8	0	1	1							X		X								
	9a	1	0	0					X												
	9b	0	0	1					X										X		
	10	0	0	2			X												X		
Del C	11	2	0	0													X	X			
	12	3	0	0							X	X			X						
	13a	2	0	0							X	X		X					X		
	13b	0	3	0							X	X		X					X		
	14a	1	0	0	X																
	14b	0	2	0	X																
	15	0	0	1													X	X	X		
	16	0	2	2	X				X		X	X									
Del D	17	2	0	0							X	X		X					X		
	18a	1	0	0							X			X							
	18b	0	1	0							X										
	19	2	1	0				X											X	X	
	20a	2	0	0			X														
	20b	0	3	0	X		X												X		
	21a	1	0	0													X				
	21b	0	2	1	X					X											
	22a	1	0	0									X								
	22b	0	1	0									X								
	22c	0	1	1					X				X								
	23	0	0	3	X					X	X	X		X	X	X			X		X
	24	0	0	3	X					X	X	X		X	X						
	25	0	1	3					X								X	X			
Total		26	25	21																	

Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 72 poäng varav 26 E-, 25 C- och 21 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 19 poäng
D: 29 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 38 poäng varav 15 poäng på minst C-nivå
B: 48 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 57 poäng varav 12 poäng på A-nivå

15. **Max 0/0/1**

Godtagbar lösning, där insikt visas om att problemet löses genom direkt avläsning i graf, med korrekt svar (-1) +1 A_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

16. **Max 0/2/2**

Korrekt tecknad ändringskvot, $\dfrac{\dfrac{A}{(x+h)}-\dfrac{A}{x}}{h}$ +1 C_B

med korrekt förenkling av ändringskvoten, t.ex. $\dfrac{-Ah}{hx(x+h)}$ +1 C_P

med korrekt bestämning av derivatan, $f'(x)=\dfrac{-A}{x^2}$ +1 A_B

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, beteckningar såsom $f(x)$, $f'(x)$, $f(x+h)$, korrekt användning av symbolen $\lim\limits_{h\to 0}$, bråkstreck och hänvisning till derivatans definition etc. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Del D

17. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. ritar graferna till derivatorna i ett och samma koordinatsystem +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x=0{,}75$) +1 E_{PL}

18. **Max 1/1/0**

a) Godtagbar lösning med godtagbart svar ($K'(30)\approx 1700$) +1 E_B

b) Godtagbar tolkning (t.ex. ”Antalet kanadagäss ökar med 800 per år då $t=20$ år”) +1 C_B

Källa: Jägareförbundet (2009). Kanadagås, publ. 2009-09-21, (hämtat 2010-10-07), http://www.jagareforbundet.se/Viltet/ViltVetande/Artpresentationer/Kanadagas/

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

19. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp cosinussatsen med korrekt insatta värden +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (2900 m^2) +1 E_M

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, $\approx$, beteckningar såsom $\cos v \approx 0{,}178$ och $v \approx 79{,}7°$, hänvisning till cosinussatsen, areasatsen, Pythagoras sats etc. +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

20. **Max 2/3/0**

a) Godtagbar inledning till resonemang, t.ex. ansätter $x = 1$ och $y = 2$ +1 E_R

med korrekt slutfört resonemang med korrekt svar (Nej) +1 E_R

b) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar $(x-1)^2 + (y-0{,}5)^2$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($5{,}5$ a.e.) +1 C_{PL}

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, $\neq$, π, rottecken, VL, HL, parenteser, hänvisning till cirkelns ekvation och termer såsom radie, omkrets, area etc. +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

21. **Max 1/2/1**

a) Godtagbart svar som visar insikt om att villkoret $F'(x) = f(x)$ inte är uppfyllt, (t.ex. ”Nej, för om man deriverar *F* får man inte *f*.”) +1 E_R

b)

E	C		A
	Troliggör för minst två specialfall att påståendet stämmer om $a < 0$ *eller* visar att påståendet inte stämmer om $a = 0$. 1 C_R	Troliggör för mer än två specialfall att påståendet stämmer om $a < 0$ *och* visar att påståendet inte stämmer om $a = 0$. 2 C_R	Visar att påståendet stämmer för *alla* $a < 0$ *och* visar att påståendet inte stämmer om $a = 0$. 2 C_R och 1 A_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Forts. uppgift 21

Kommentar (införd 2013-02-08): Bedömningsanvisningen ovan utgår från att eleven utreder fallen $a = 0$ och $a < 0$ separat och sedan drar separata slutsatser om dessa. Om någon sammanfattning av slutsatserna görs så är den av typen ”Det stämmer ibland” eller ”Det stämmer inte alltid.”

Om eleven istället visar att påståendet ”Grafen till $f(x) = x^3 + ax$ har tre olika nollställen om konstanten $a \leq 0$” är falskt genom att t.ex. peka på att fallet $a = 0$ strider mot påståendet, så ges två resonemangspoäng på C- och en resonemangspoäng på A-nivå.

22. **Max 1/2/1**

a) Godtagbar lösning med korrekt svar ($95°$) +1 E_M

b) Godtagbar lösning med godtagbart svar (3,8 %) +1 C_M

c)

E	C	A
	Utvärderar Karolinas modell med ett enkelt omdöme. Omdömet visar insikt om att Karolinas modell inte tar hänsyn till omgivningens temperatur. 1 C_M	Utvärderar Karolinas modell med ett nyanserat omdöme. Omdömet visar insikt om att Karolinas modell inte tar hänsyn till omgivningens temperatur *och* hur denna brist påverkar modellens egenskaper. 1 C_M och 1 A_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

23. **Max 0/0/3**

Korrekt tecknad funktion för produkten i två variabler, t.ex. $D = xy(y - x)$ +1 A_B

där en variabel eliminerats korrekt, t.ex. $D = x(8 - x)(8 - 2x)$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning, inklusive godtagbar verifiering av maximum, med godtagbart svar ($6{,}31$ och $1{,}69$) +1 A_{PL}

Kommentar: Observera att om eleven härlett funktionen $D = 2x^3 - 24x^2 + 64x$ erhålls maximum då $x \approx 1{,}7$ och om eleven härlett funktionen $D = -2x^3 + 24x^2 - 64x$ erhålls maximum då $x \approx 6{,}3$

Källa: Tichomirov, V.M. (1990). *Stories about Maxima and Minima*. Providence, R.I.: American Mathematical Society. Sid.37

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

24. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, t.ex. förklarar att derivatan är en funktion av andra graden som har en extrempunkt då $x = 4$ +1 A_R

med godtagbart slutfört resonemang med korrekt svar (På grund av symmetri hos andragradsfunktionen måste $f'(6) = f'(2) = -1$) +1 A_R

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, beteckningar såsom $f(x)$, $f'(x)$, $f'(6) = -1$ och termer såsom symmetri, andragradsfunktion, tredjegradsfunktion, graf, derivata och en tydlig figur med införda beteckningar etc. +1 A_K

Kommentar: Även en algebraisk ansats som utgår från de givna villkoren och en generell tredjegradsfunktion (t.ex. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$) och som leder till sambanden $24a + 2b = 0$ och $12a + 4b + c = -1$ ges den första poängen.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

25. **Max 0/1/3**

E	C	A	
	Anger någon relevant egenskap hos minst en av modellerna (summan eller integralen) som förklaring till skillnaden, t.ex. antyder att skillnaden har att göra med att mormor bara sätter in pengar ibland *eller* att hon inte sätter in pengar hela tiden.	Kopplar skillnaden till att de två modellerna (summan och integralen) baseras på en diskret respektive en kontinuerlig funktion, men ger ingen godtagbar förklaring till varför summan är större än integralen *eller* diskuterar/visar att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av ett antal staplar.	Diskuterar/visar att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av ett antal staplar *och* förklarar varför summan blir större än integralen genom att t.ex. hänvisa till en figur som visar hela tidsperioden där det framgår att arean under kurvan (integralen) är mindre än den sammanlagda arean av de sex staplarna (summan).
	1 C_R	1 C_R och 1 A_R	1 C_R och 2 A_R

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara integralbeteckningar, likhetstecken och termer såsom funktionsvärde, diskret och kontinuerlig funktion, area, summa och en tydlig figur över hela tidsperioden etc. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Bedömda elevlösningar

Uppgift 12

Elevlösning 1 (2 E_P)

$f(x) = x^3 - 3x^2 \qquad f'(x) = 3x^2 - 6x$

$\frac{3x^2 - 6x}{3} = \frac{0}{3}$

$x^2 - 2x = 0$

$x = +\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2} = 1 \pm 1$

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = 0 - 6 = -6$, dvs $x = 0$ Maxpunkt

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6$, dvs $x = 2$ Minpunkt

Kommentar: Elevlösningen innehåller ingen beräkning av *y*-koordinaterna. Däremot verifieras extrempunkternas karaktär. Sammantaget ges lösningen den första och den tredje procedurpoängen på E-nivå.

Uppgift 13b

Elevlösning 1 (2 C_{PL} och 1 C_K)

$g(x) = x^2 + 8x$

$g'(x) = 2x + 8$

$g'(6) = 2 \cdot 6 + 8 = 20$

$y = kx + m$

$84 = 20 \cdot 6 + m$

$m = -36$

$g(6) = 6^2 + 8 \cdot 6 = 36 + 48 = 84$

$y = 20x - 36$

$20x = 36$

$x = 36/20 = 9/5$

SVAR: $\left(\frac{9}{5}, 0\right)$

Kommentar: Elevlösningen är någorlunda strukturerad med korrekt hantering av symbolerna $g(x)$, $g'(x)$ och $g(6)$. Det framgår dock inte med tydlighet att $k = g'(6)$ och att ekvationen $y = 0$ löses för att beräkna skärningen med *x*-axeln. Elevlösningens kvalitet motsvarar därmed nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 15

Elevlösning 1 (1 A_{PL})

$F(5) - F(-2) = -2 - (-1) = -1$ SVAR: -1

Kommentar: I elevlösningen visas insikt om att problemet löses genom avläsning i graf, även om det inte framgår varför avläsning i grafen skett. Elevlösningen motsvarar en problemlösningspoäng på A-nivå.

Uppgift 16

Elevlösning 1 (1 C_B, 1 C_P, 1 A_B och 1 A_K)

derivatans definition

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{A}{x+h} - \frac{A}{x}}{h} = \frac{\frac{Ax - A(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \frac{Ax - Ax - Ah}{hx(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-Ah}{hx^2 + h^2x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-A}{x^2 + hx} = -\frac{A}{x^2}$$

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt härledning av derivatan, vilket motsvarar en begrepps- och en procedurpoäng på C-nivå samt en begreppspoäng på A-nivå. Under förenklingen av ändringskvoten tappas ”lim” bort på första och andra raden, men vid själva gränsvärdesbestämningen på sista raden är skrivsättet korrekt, vilket är väsentligt i denna uppgift. Lösningen uppfyller därmed nätt och jämnt kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 18b

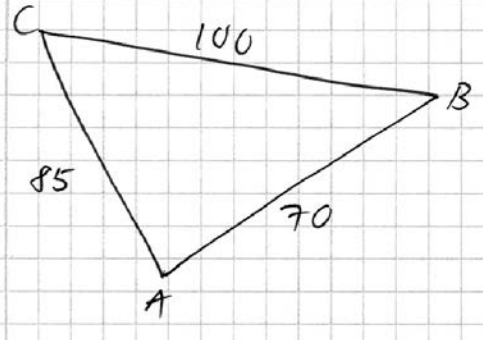
Elevlösning 1 (1 C_B)

Kanadagässen ökade med en hastighet av 800 gäss/år efter 20 år.

Kommentar: Tolkningen att det är en hastighet i antal kanadagäss/år som efterfrågas framgår av lösningen. Frasen ”efter 20 år” är otydlig eftersom det skulle kunna tolkas som att hastigheten är konstant då $t > 20$. Lösningen motsvarar därmed nätt och jämnt en begreppspoäng på C-nivå.

Uppgift 19

Elevlösning 1 (2 E_M och 1 C_K)



$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{100^2+85^2-70^2}{2\cdot 100\cdot 85}$$

$$\cos C = 0,725$$

$$\arccos = 43,5^\circ$$

$$T = \frac{ab\sin v}{2}$$

$$T = 100\cdot 85\cdot \sin 43,5^\circ / 2$$

$$T = 2900 \text{ m}^2$$

Kommentar: Elevlösningen innehåller hänvisningar till areasatsen och cosinussatsen med formler men innehåller det felaktiga skrivsättet ”arccos = 43,5° ”. Elevlösningen motsvarar därmed nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 20

Elevlösning 1 (2 E_R, 2 C_{PL} och 1 C_K)

a) $x^2-2x+y^2-y=0,5$ $(1,2)$

$1^2-2\cdot 1+2^2-2=0,5$

$1 \neq 0,5$ Nej, det gör den inte.

b) Cirkelns ekvation $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$(x-1)^2+(y-0,5)^2=r^2$

$x^2-2x+1+y^2-y+0,25=r^2$

$x^2-2x+y^2-y=r^2-1,25$

$r^2-1,25=0,5$

$r^2=1,75$

$A=\pi\cdot 1,75 \approx 5,5$ a.e

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet, men saknar ett $\neq$ -tecken på andra raden i a)-uppgiften. I b)-uppgiften saknas en tydlig explicit motivering av varför en identifikation av högerleden kan göras. Trots detta är lösningen är möjlig att följa och förstå. Sammantaget motsvarar detta nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 E_R, 2 C_{PL} och 1 C_K)

a) Sätter in x och y i ekvationen

$VL = x^2 - 2x + y^2 - y = 1^2 - 2\cdot 1 + 2^2 - 2 = 1$

$HL = 0,5$

$VL \neq HL$ Svar: Nej det stämmer inte

b) Jag väljer ett värde på x $(x = 1)$ och räknar ut y.

$1^2 - 2\cdot 1 + y^2 - y = 0,5$

$y^2 - y - 1,5 = 0$

$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1,75}$ dvs punkten $\left(1, \frac{1}{2} + \sqrt{1,75}\right)$ ligger på cirkeln

Cirkelns radie är avståndet mellan denna punkt och medelpunkten:

$r = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1,75} - 0,5\right)^2} = \sqrt{1,75}$

$Area = \pi r^2 = \pi \cdot \sqrt{1,75}^2 = \underline{\underline{5,5 \text{ areaenheter}}}$

Kommentar: I a)-uppgiften hålls VL och HL åtskilda och därmed uppstår inga problem med likhetstecken. I b)-uppgiften används en alternativ och lika väl fungerande lösningsmetod som i elevlösning 1. Sammantaget ger lösningen samtliga resonemangs- och problemlösningspoäng samt kommunikationspoängen på C-nivå.

Uppgift 21b

Elevlösning 1 (1 C_R)

$f(x) = x^3 + ax \quad a \le 0$

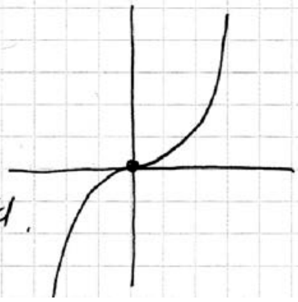
Testar $a = -5$

$f(x) = x^3 - 5x$ på graffönstret ser ut så här

Den har tre nollställen

Testar $a = 0$

$f(x) = x^3$ har ett nollställe



SVAR: Det stämmer inte alltid.

Kommentar: I elevlösningen undersöks antalet nollställen då $a = -5$ och då $a = 0$ med grafräknare. Om elevlösningen innehållit en undersökning av ytterligare ett specialfall, t.ex. $a = -10$, skulle lösningens kvalitet ha motsvarat två resonemangspoäng på C-nivå. Lösningen ges nu en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C_R och 1 A_R)

$f(x) = x^3 + ax$

Nollställen om $f(x) = 0$

$a \le 0$

$\boxed{a = 0}$

$x^3 = 0$

$x = 0$

Ett nollställe

$\boxed{a < 0}$

$x^3 + ax = 0$

$x(x^2 + a) = 0$

$x_1 = 0 \quad || \quad x^2 + a = 0$

$\uparrow \qquad x^2 = -a$

ett nollställe $\qquad x = \pm\sqrt{-a}$

Blir 2 nollställen om $a < 0$

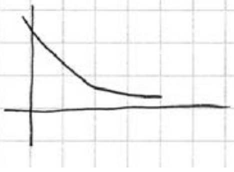
Om $a = 0$ fås ett
och om $a < 0$ fås tre nollställen. Det är sant om $a < 0$.

Kommentar: Elevlösningen uppvisar en korrekt, generell undersökning. Lösningen ges samtliga resonemangspoäng.

Uppgift 22c

Elevlösning 1 (1 C_M)

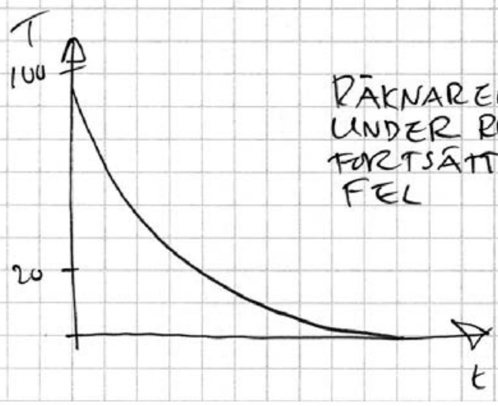
c) $T(t) = 95e^{-0,039t}$



Det märks inte i modellen att det är 20° i rummet

Kommentar: I elevlösningen framgår att modellen inte tar hänsyn till rumstemperaturen, men inte på vilket sätt detta påverkar modellens egenskaper. Elevlösningen ges därmed en modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (1 C_M och 1 A_M)



RÄKNAREN VISAR ATT GRAFEN GÅR UNDER RUMSTEMPERATUREN OCH FORTSÄTTER ATT MINSKA. DET ÄR FEL

Elevlösning 3 (1 C_M och 1 A_M)

Modellen bli fel för grafen går under 20°-nivån och närmar sig noll. Kaffet kan ju aldrig bli kallare än rummet.

Elevlösning 4 (1 C_M och 1 A_M)

$T(60) = 95 \cdot e^{-0,039 \cdot 60} \approx 9,15$

$T(120) = 95 \cdot e^{-0,039 \cdot 120} \approx 0,88$

$T(200) = 95 \cdot e^{-0,039 \cdot 200} \approx 0,04$

Temperaturen borde närma sig 20°C vilket den inte gör

Kommentar: I elevlösning 2, 3 och 4 framgår att modellen inte tar hänsyn till rumstemperaturen och även på vilket sätt detta påverkar modellen ("grafen går under rumstemperaturen och fortsätter att minska", "grafen går under 20°-nivån och närmar sig noll" respektive "Temperaturen borde närma sig 20° vilket den inte gör"). Elevlösningarna ges två modelleringspoäng, en på C-nivå och en på A-nivå.

Uppgift 23

Elevlösning 1 (1 A_B och 2 A_{PL})

$x + y = 8$ $y = 8 - x$

Talens differens $x - (8 - x)$

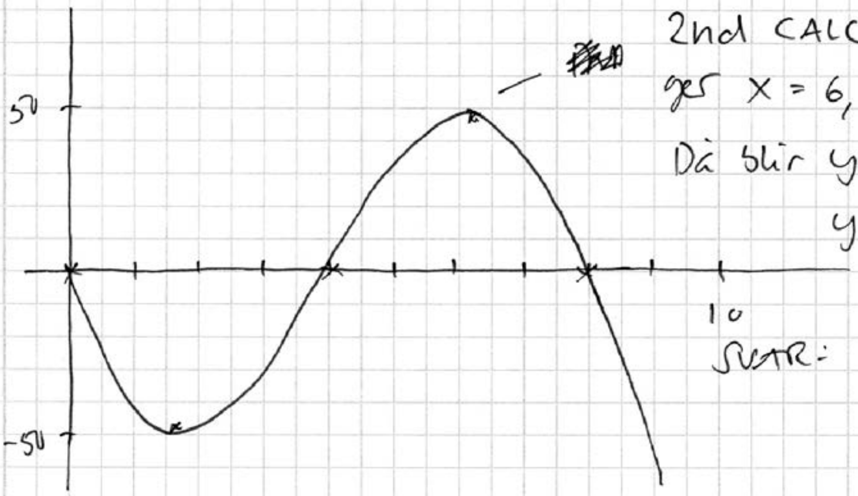
Talens produkt $x(8 - x)$

Deras gemensamma produkt $(2x - 8)(8x - x^2)$

$y = -2x^3 + 16x^2 - 64x + 8x^2$

$y = -2x^3 + 24x^2 - 64x$

Ritar på grafräknaren



2nd CALC maximum ger $x = 6,30940$

Då blir $y = 8 - 6,30940$

$y = 1,6906$

SVAR: 6,30 och 1,69

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt härledning av ett uttryck för produkten. Lösningen visar även hur grafräknaren används på ett godtagbart sätt för bestämning och verifiering av maximum. Sammantaget motsvarar lösningen en begreppspoäng och två problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (0 poäng)

$0 < x < 8$ $\qquad$ $x + y = 8$

$0 < y < 8$

$x = 5 \quad y = 3 \quad 5 \cdot 3(5-3) = 30$

$x = 7 \quad y = 1 \quad 7 \cdot 1(7-1) = 42$

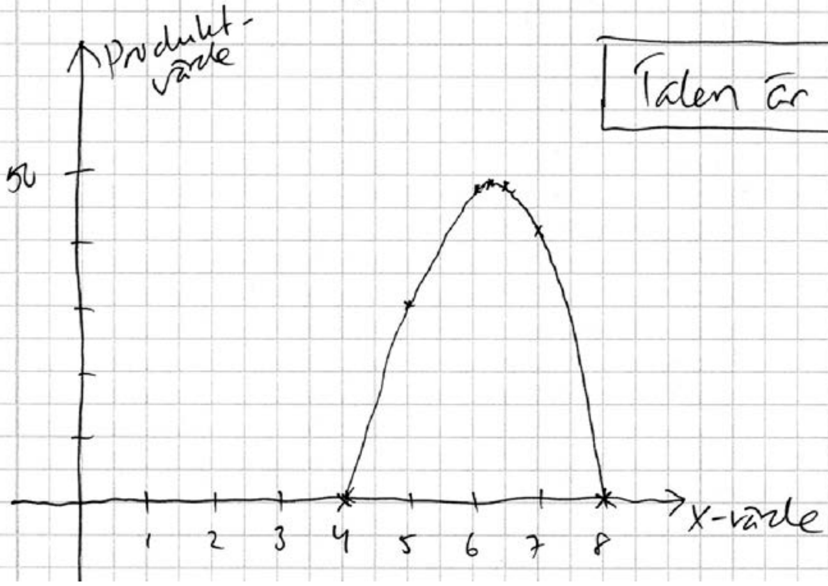
$x = 6{,}5 \quad y = 1{,}5 \quad 6.5 \cdot 1{,}5(6.5-1{,}5) = 48.75$

$x = 6{,}4 \quad y = 1{,}6 \quad 6{,}4 \cdot 1{,}6(6{,}4-1{,}6) = 49{,}152$

$x = 6{,}3 \quad y = 1{,}7 \quad 6{,}3 \cdot 1{,}7(6{,}3-1{,}7) = 49{,}266$

$x = 6{,}2 \quad y = 1{,}8 \quad 6{,}2 \cdot 1{,}8(6{,}2-1{,}8) = 49{,}104$

$\boxed{\text{Talen är } 6{,}3 \text{ och } 1{,}7}$

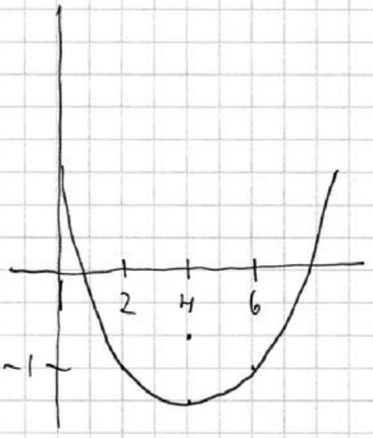


Kommentar: Elevlösningen visar hur ett korrekt resultat uppnås med hjälp av prövning. Prövningen styrker inte att maximum verkligen hittats och är ineffektiv i detta sammanhang. En uppgift av detta slag ska, på A-nivå, kunna lösas med mer effektiva metoder som bygger på användning av symbolisk algebra (i detta fall ett funktionsuttryck). Sammantaget ges lösningen inga problemlösningspoäng på A-nivå.

Uppgift 24

Elevlösning 1 (2 A_R)

$f'(x)$ måste vara en andragradare och
$f''(x)$ måste vara en rät linje



$f'(6) = f'(2)$
eftersom symetrilingen
går i $x = 4$
$f'(6)$ är alltså lika med
-1

SVAR: $f'(6) = -1$

Kommentar: Elevlösningen visar ett godtagbart resonemang som leder till ett korrekt svar. Att $f''(4) = 0$ betyder att derivatafunktionen har en extrempunkt då $x = 4$ förklaras inte och inte heller kopplingen mellan extrempunkten och symmetrilinjen. Att andraderivatan är en rät linje är inte relevant. På grund av dessa otydligheter uppfyller inte lösningen kravet för kommunikationspoäng på A-nivå. Sammantaget ger lösningen två resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (2 A_R och 1 A_K)

f'' är 0 i punkten $x = 4$. Detta är ett maximum eller minimum till andragradsfunktionen f'. Andragradsfunktioner är symmetriska med symmetrilinje där extrempunkten finns. Därför är $f'(2)$ lika med $f'(6)$, dvs -1.

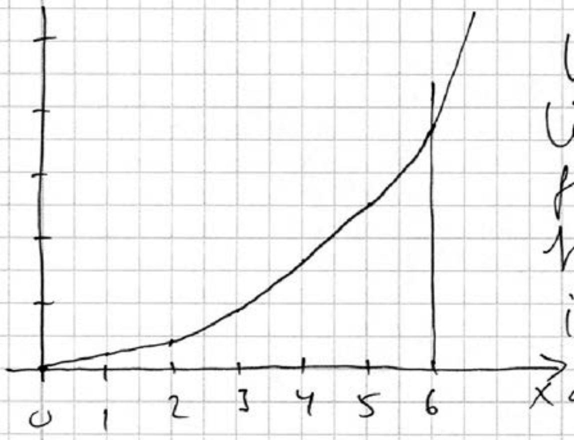
Kommentar: I elevlösningen förklaras både vad $f''(4) = 0$ betyder och att extrempunkten ligger på symmetrilinjen. Redovisningen skulle ha varit ännu enklare att följa och förstå om den innehållit en skiss med derivatafunktionen, symmetrilinjen och punkterna $(2, -1)$ och $(6, -1)$ markerade. Sammantaget motsvarar detta två resonemangspoäng, men nätt och jämnt en kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 25

Elevlösning 1 (0 poäng)

$$\int_0^6 100x^2\,dx = \left[\frac{100x^3}{3}\right]_0^6 = \frac{100\cdot 6^3}{3} - 0 = 7200$$

Mormor lägger $100\cdot 0^2 + 100\cdot 1^2 + 100\cdot 2^2 + 100\cdot 3^2 + 100\cdot 4^2 + 100\cdot 6^2 + 100\cdot 5^2 = 9100$



Integralen ger ett för litet värde eftersom funktionen inte visar hur mycket Mario har i burken. Den visar bara hur mycket hans mormor lägger till. Och om funktionen inte visar det vi vill ha, så är det inte troligt att integralen gör det heller.

Kommentar: Elevlösningen visar korrekta beräkningar men ingen relevant egenskap som kan kopplas till skillnaden anges. Sammantaget ger denna lösning 0 poäng.

Elevlösning 2 (1 C_R)

Eftersom man bara får in pengar en gång per år stämmer det inte.

Kommentar: Elevlösningen antyder att skillnaden kan ha att göra med att mormors summa är en diskret funktion, vilket nätt och jämnt motsvarar en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösning 3 (1 C_R och 1 A_R)

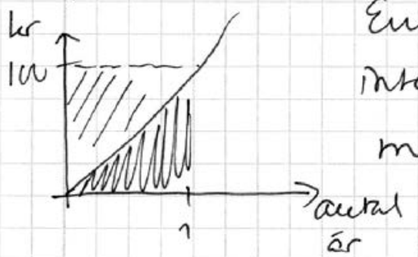
Om man använder integralen för att bestämma hur mycket pengar som finns i burken efter 6 år får man fel värde eftersom $y=100x^2$ är en kontinuerlig funktion dvs man förutsätter att mormor sätter in pengar hela tiden medans hon i själva verket bara sätter in pengar en gång om året

Kommentar: I elevlösningen kopplas skillnaden till att det rör sig om en kontinuerlig och en diskret funktion. Dock ges ingen förklaring till varför summan är större än integralen. Sammantaget motsvarar detta två resonemangspoäng, en på C- och en på A-nivå.

Elevlösning 4 (1 C_R och 1 A_R)

Integralen är detsamma som arean under grafen då man inte har någon area under x-axeln som i det här fallet. Då Mario är ett år skulle det ha funnits $\int_0^1 100x^2\,dx = \left[\frac{100x^3}{3}\right]_0^1 = 33$ kr

Men på Marios födelsedag lägger hans mormor i 100 kr.

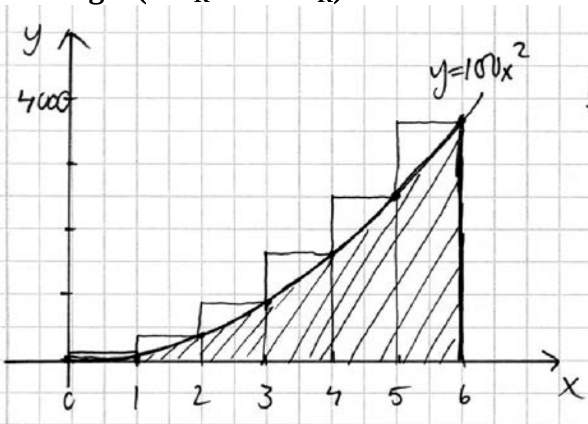


Enligt diagrammet syns det att integralen bara blir 33 kr efter ett år, men att där finns 100 kr i burken.

Eftersom även arean ovanför upp till 100-strecket visar faktiskt antal pengar i burken. På samma sätt måste man hela tiden lägga till en viss area som finns ovanför grafen för att få fram hur mycket som finns i burken vilket gör att integralen får ett för litet värde.

Kommentar: Elevlösningen visar medvetenhet om att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av ett antal staplar. Resonemanget om integral- och stapelarea rör bara det första året och det är därför oklart varför integralen verkligen är mindre än summan över hela tidsperioden. Sammantaget ger lösningen två resonemangspoäng, en på C- och en på A-nivå.

Elevlösning 5 (1 C_R och 2 A_R)



Det integralen beräknar

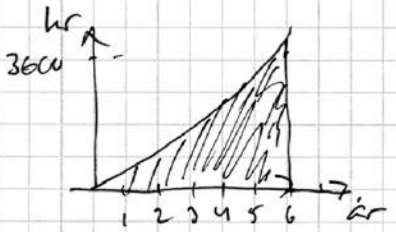
+ Det Mario egentligen får.

Alltså blir integralen mindre

Kommentar: Lösningen innehåller en tydlig figur med 6 staplar som visar att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av ett antal staplar. Det framgår av lösningen att integralen har mindre värde än stapelsumman. Lösningen saknar dock förklaringar och är därmed, trots den tydliga figuren, kommunikationsmässigt knapphändig. Kommunikationspoäng på A-nivå erhålls därmed inte.

Elevlösning 6 (1 C_R, 2 A_R och 1 A_K)

$\int_0^6 100x^2\,dx$ är arean under grafen för funktionen $100x^2$



$$\int_0^6 100x^2\,dx = \left[\frac{100}{3}x^3\right]_0^6 = \frac{100}{3}\cdot 6^3 - \frac{100}{3}\cdot 0^3 =$$

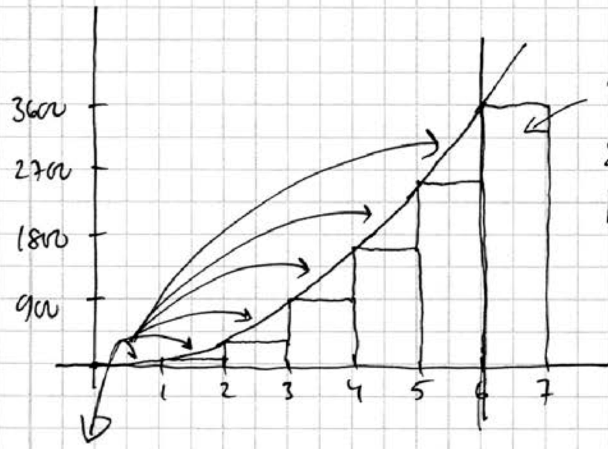
7200 kr

Det kommer egentligen satt in är

$100\cdot 0^2 + 100\cdot 1^2 + 100\cdot 2^2 + 100\cdot 3^2 + 100\cdot 4^2 + 100\cdot 5^2 + 100\cdot 6^2 =$

$= 9100$ kr

Detta har illustreras



Dessa pengar får han på sin 6 års dag och därför har han dem också

Och det är därför $\int_0^6 100x^2\,dx$ inte stämmer för den räknar bara fram till 6 år

Man ser att sista stapeln har större area än de små "trianglarna" under kurvan

Kommentar: Elevlösningen är lätt att följa och förstå och visar med en tillräckligt tydlig figur att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av sex staplar. Det framgår av figuren och förklaringarna att integralen har mindre värde än stapelsumman. Sammantaget anses elevlösningen uppfylla kraven för resonemangs- och kommunikationspoäng på A-nivå.