Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 65 poäng varav 23 E-, 23 C- och 19 A-poäng. Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla fyra delprov, det vill säga Delprov A, B, C och D.

Kravgräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 26 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 34 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 44 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 52 poäng varav 10 poäng på A-nivå

15. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, skriver om nämnaren som $(x-1)(x+3)$ och inser att en av faktorerna $(x-1)$ eller $(x+3)$ ska finnas i täljaren $x^2 - ax - 12$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a_1 = -11$ och $a_2 = 1$) +1 A_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

16. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t.ex. visar insikt om att $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3^h - 1}{h} = y'(0)$ +1 A_B

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($\ln 3$) +1 A_P

Delprov D

17. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer ett allmänt uttryck för den primitiva funktionen, $F(x) = 0,25x^4 + x^3 + C$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($F(x) = 0,25x^4 + x^3 - 5$) +1 E_{PL}

18. **Max 1/0/0**

Godtagbart enkelt resonemang med slutsatsen att Lisa har fel +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

19. **Max 3/4/0**

a) Godtagbar lösning med korrekt svar ($22\,°\mathrm{C}$) +1 E_M

b) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $17\mathrm{e}^{-0{,}693x}+5=10$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($1{,}8\ \mathrm{h}$) +1 E_M

c) Godtagbar ansats, visar insikt om att funktionen ska deriveras +1 C_B

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar inklusive korrekt enhet ($2{,}9\,°\mathrm{C/h}$) +1 C_B

Kommentar: Svaret $-2{,}9\,°\mathrm{C/h}$ bedöms som godtagbart.

d) Godtagbar ansats, t.ex. ansätter några värden på x i funktionsuttrycket +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($5\,°\mathrm{C}$) +1 C_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

20. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. deriverar och tecknar ekvationen $4x^3-4=-17{,}5$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($-1{,}5$) +1 C_{PL}

21. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, bestämmer ett system av olikheter som motsvarar kraven, t.ex.

$$\begin{cases} x+3y \leq 300 \\ 2x+4y \leq 520 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$ +1 C_M

Godtagbar lösning, där $(0, 100), (260, 0)$ och $(180, 40)$ undersöks, med korrekt svar (180 paket 1 och 40 paket 2) +1 C_M

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 och nedanstående kommentar +1 C_K

Kommentar 1: Om någon av följande brister

- villkoren $x \geq 0$ och $y \geq 0$ saknas,
- villkoren $x > 0$ och $y > 0$ används eller
- likhetstecken används istället för olikhetstecken

kompenseras av en korrekt figur som visar det aktuella området och de punkter som är relevanta, kan första modelleringspoängen ges. Däremot anses inte kraven för kommunikationspoäng på C-nivå kunna uppfyllas eftersom lösningen blir otydlig och motsägande. En sådan elevlösning ges maximalt två modelleringspoäng på C-nivå.

Kommentar 2: Bedömningen till denna uppgift avviker från de beskrivna bedömningsmodellerna på sidan 3. Här kan andra modelleringspoängen delas ut oavsett om första modelleringspoängen har delats ut eller inte.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

22. **Max 0/0/3**

Godtagbar generell ansats, t.ex. tecknar en relevant ekvation,

$$F\left(\frac{1,02^{11}-1}{1,02-1}\right) = J\left(\frac{(1,02^2)^6-1}{1,02^2-1}\right)$$ +1 A_R

med ett i övrigt godtagbart generellt resonemang, där det t.ex. visas att

$$\frac{J}{F} \approx 1,83$$ +1 A_R

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

23. **Max 0/0/4**

Godtagbar ansats, t.ex. visar insikt om att $\int 5,73\mathrm{e}^{0,0573\cdot t}\mathrm{d}t$ kan användas +1 A_B

med godtagbar fortsättning, tar hänsyn till att antalet bakterier är 100 då $t = 0$, t.ex. genom att teckna ekvationen $100 + \int_0^x 5,73\mathrm{e}^{0,0573\cdot t}\,\mathrm{d}t = 100000$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (120 min) +1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

Kommentar: Observera att vissa felaktiga lösningar,

t.ex. $\int_0^x 5,73\mathrm{e}^{0,0573\cdot t}\,\mathrm{d}t = 100000$ också ger svaret 120 minuter.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

24. **Max 0/0/3**

a) Godtagbar ansats, funktionsuttrycket innehåller faktorn $30 \cdot 0,98^x$ +1 A_M

med korrekt svar ($D(x) = (40 + x)(30 \cdot 0,98^x)$) +1 A_M

b) Godtagbar grafisk lösning, där det korrekta funktionsuttrycket $D(x) = (40 + x)(30 \cdot 0,98^x)$ används, med godtagbart svar (49,50 kr/kg) +1 A_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Elevlösning 3 (2 A_{PL})

Förkortning möjlig

a_1

$$\frac{x^2-ax-12}{x^2+2x-3} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2-4x+3x-12}{x^2-x+3x-3} = \frac{x^2-x-12}{x^2+2x-3}$$

$x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$

Förkortning möjlig

$$\boxed{\begin{aligned} \text{svar } a_1 &= 1 \\ a_2 &= 11 \end{aligned}}$$

$$\frac{x^2-ax-12}{x^2+2x-3} = \frac{(x-1)(x+12)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2+12x-x-12}{x^2+2x-3} =$$

$$= \frac{x^2-11x-12}{x^2+2x-3}$$

a_2

Kommentar: Elevlösningen är korrekt förutom ett lapsusfel i sista ledet. Elevlösningen ges två problemlösningspoäng på A-nivå.

Uppgift 18

Elevlösning 1 (1 E_R)

$x^4+0{,}01=0$

$x^4=-0{,}01$

x^4 kan aldrig vara negativt

Kommentar: Resonemanget är godtagbart men det saknas en tydlig slutsats kring Lisas påstående. Lösningen bedöms nätt och jämnt motsvara kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösning 2 (1 E_R)

Nej, ekvationen har inga svar egentligen dvs den är inte lösbar och ingen siffra upphöjt till fyra kan bli $-0{,}01$

Kommentar: Argumentet ”ingen siffra upphöjt till fyra kan bli $-0{,}01$” anses tillräckligt för att motsvara kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösning 3 (1 E_R)

Nej, hon har fel. $x^4=-0{,}01$ det går inte att dra fjärderoten ur ett negativt tal, det blir ett icke reellt tal.

Kommentar: Argumentet ”det går inte att dra fjärderoten ur ett negativt tal” anses tillräckligt för att motsvara kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 19d

Elevlösning 1 (0 poäng)

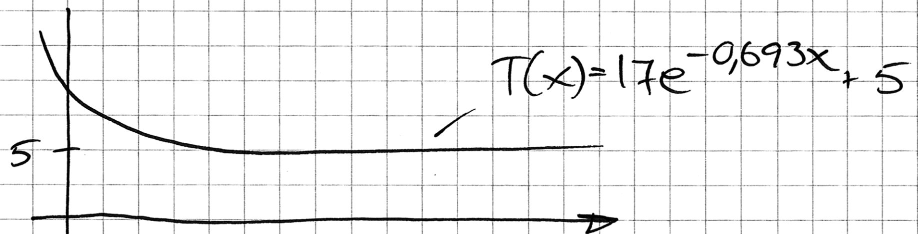
Vi säger att $x = 1000$

$T(1000) = 17e^{-0,693\cdot 1000} + 5 = 5$ Svar $5°C$ (undre gräns)

Kommentar: I elevlösningen ansätts enbart ett värde på x vilket inte är tillräckligt för att dra slutsatsen att uttryckets värde *närmar sig* 5. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (2 C_M)

Temperaturen blir 5°C. Det kan vi se när vi ritar upp grafen m.hj.a. miniräknaren



Grafen sjunker inte under $y=5$ utan stannar på $y=5$
Vattnet kan alltså inte bli kallare än 5°C.

Kommentar: I elevlösningen används den matematiska modellens graf för att visa att den undre gränsen är $5\,°C$. Skalan på x-axeln framgår inte, grafen går inte genom $(0,22)$ och det är inte matematiskt korrekt att skriva att ”Grafen … stannar på $y = 5$”. Trots detta bedöms elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för två modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösning 3 (2 C_M)

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{17e^{-0,693x}} + 5 = 5$$

Detta kommer att gå mot noll när x går mot oändligheten och kvar blir då 5.

SVAR: Undre gräns är 5°C

Kommentar: I elevlösningen används modellen för att visa att den undre gränsen för vattnets temperatur är $5\,°C$. Elevlösningen uppfyller kraven för två modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 21

Elevlösning 1 (1 C_M)

$$\begin{cases} x + 3y \leq 300 & (1) \\ 2x + 4y \leq 520 & (2) \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \qquad I = 40x + 100y$$

(1) $3y \leq 300 - x$

$y \leq 100 - \frac{x}{3}$

(2) $4y \leq 520 - 2x$

$y \leq 130 - \frac{x}{2}$

(1) $y = 100 - \frac{x}{3}$

$y=0$ $\quad 0 = 100 - \frac{x}{3}$

$x = 300$

$x=0$ $\quad y = 100 - \frac{0}{3}$

$y = 100$

(2) $y = 130 - \frac{x}{2}$

$y=0$ $\quad 0 = 130 - \frac{x}{2}$

$x = 260$

$x=0$ $\quad y = 130 - \frac{0}{2}$

$y = 130$

(1) = (2) $\quad 100 - \frac{x}{3} = 130 - \frac{x}{2}$

$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 130 - 100$

$\frac{x}{6} = 30$

$x = 180$

$y = 100 - \frac{180}{3}$

$y = 100 - 60$

$y = 40$

$(180{,}40) \leftarrow$ skärning

Punkter

$(180, 40)$

$(0, 100)$

$(260, 0)$

$I = 40x + 100y$

$V = 40 \cdot 180 + 100 \cdot 40 = 11200$

$V = 40 \cdot 0 + 100 \cdot 100 = 10000$

$V = 40 \cdot 260 + 100 \cdot 0 = 10400$

Svar: 180 paket 1 och 40 paket 2

Kommentar: Elevlösningen utgår från ett system av olikheter där de felaktiga villkoren $x > 0$ och $y > 0$ anges. Beräkningarna som följer är korrekt utförda. Även om lösningen ger ett korrekt svar så bygger den på felaktiga villkor som ger en motsägelse i lösningen vilket gör att kraven för kommunikationspoäng inte är uppfyllda. En figur med markerade axelpunkter hade kompenserat de felaktiga villkoren (se kommentar 1 till bedömningsanvisning). Lösningen ges den andra modelleringspoängen på C-nivå (se kommentar 2 till bedömningsanvisning).

Elevlösning 2 (1 C_M och 1 C_K)

x = antal paket 1

y = antal paket 2

$I = 40x + 100y$

$x + 3y \leq 300$ $\quad (y = 100 - x/3)$

$2x + 4y \leq 520$ $\quad (y = 130 - x/2)$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Punkt 1 (0,100)

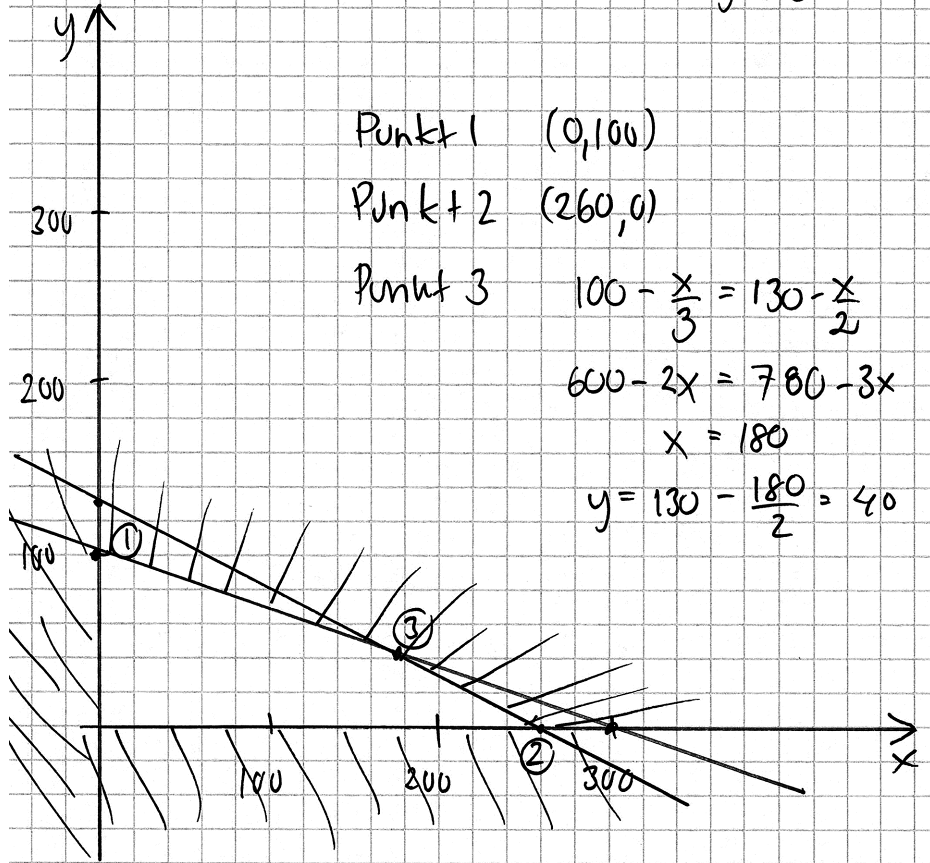
Punkt 2 (260,0)

Punkt 3 $\quad 100 - \frac{x}{3} = 130 - \frac{x}{2}$ $\quad$ (180,40)

$600 - 2x = 780 - 3x$

$x = 180$

$y = 130 - \frac{180}{2} = 40$



$I = 40x + 100y$

$40 \cdot 0 + 100 \cdot 100 = 10000$ $\quad 40 \cdot 260 + 100 \cdot 0 = 10400$

$40 \cdot 180 + 100 \cdot 40 = \underline{11200}$

Största intäkten är 11200 kr

Kommentar: Uppgiften är löst i sin helhet och är korrekt förutom att det inte är intäkten som efterfrågas utan hur många paket av vardera sorten som ska tillverkas. På grund av det felaktiga svaret anses inte kraven för den andra modelleringspoängen på C-nivå vara uppfyllda. När det gäller kommunikation saknas klammer kring olikheterna, redovisning om hur linjerna ritats och redovisning om hur koordinaterna för punkt 1 och 2 bestämts, men lösningen är i övrigt möjlig att följa och förstå med en tydlig figur. Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för den första modelleringspoängen samt nätt och jämnt kommunikationspoängen på C-nivå.

Uppgift 22

Elevlösning 1 (2 A_R och 1 A_K)

John $J(1{,}02^2)^5 + J(1{,}02^2)^4 + \ldots + J(1{,}02^2)^1 + J$

Frida $F \cdot 1{,}02^{10} + F \cdot 1{,}02^9 + F \cdot 1{,}02^8 + \ldots + F \cdot 1{,}02 + F$

John $S_6 = x = \dfrac{J\left((1{,}02^2)^6 - 1\right)}{1{,}02^2 - 1}$

$x \approx J \cdot 6{,}6396$

Frida $S_{11} = x = \dfrac{F\left(1{,}02^{11} - 1\right)}{1{,}02 - 1}$

$x \approx F \cdot 12{,}1687$

Eftersom Johns och Fridas summa ska vara lika stora sätter vi $F \cdot 12{,}1687 = J \cdot 6{,}6396$

$J \approx \dfrac{F \cdot 12{,}1687}{6{,}6396}$

Det innebär att John måsk betala 83% mer än Frida

$J \approx 1{,}83F$

Kommentar: I elevlösningen visas generellt att John måste sätta in ca 83 % mer än Frida vid varje insättning. När det gäller kommunikation framgår det inledningsvis att Fridas och Johns insättningar motsvarar två geometriska summor men variabeln x definieras på två olika sätt och motivering till varför förändringsfaktorn i det ena fallet är $1{,}02^2$ saknas. Lösningen är i övrigt lätt att följa och förstå. Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för två resonemangspoäng och nätt och jämnt en kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 23

Elevlösning 1 (1 A_B)

100 från början (per gram)

hastighet $5{,}73e^{0{,}0573t}$ bakt./min

$$\int_0^t 5{,}73e^{0{,}0573t} = 100\,000$$

$$= \left[\frac{5{,}73e^{0{,}0573 \cdot t}}{0{,}0573}\right]_0^t = \left[100e^{0{,}0573t}\right]_0^t$$

$$= 100e^{0{,}0573t} - 100e^0 = 100e^{0{,}0573t} - 100$$

$$= 10\,000 + 100 = 100e^{0{,}0573t}$$

$$100100 = 100e^{0{,}0573t}$$

$$1001 = e^{0{,}0573t}$$

$$\ln 1001 = \ln e^{0{,}0573t}$$

$$0{,}0573t = \frac{\ln 1001}{\ln e}$$

$$t \approx 121 \text{ min}$$

Kommentar: Elevlösningen visar insikt om att $\int 5,73\mathrm{e}^{0,0573 \cdot t}\,\mathrm{d}t$ ska beräknas, men tar ingen hänsyn till antalet bakterier då $t = 0$. Elevlösningen uppfyller därmed kraven för en begreppspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 A_B och 1 A_{PL})

$5{,}73\,e^{0{,}0573t}$

Gör om från $f'(x)$ till $f(x)$

$f(x) = \dfrac{5{,}73\,e^{0{,}0573t}}{0{,}0573} + C$ (100 bakterier från början. $C = 100$)

$f(x) = 100\,e^{0{,}0573t} + 100 = 100000$

$99900 = 100\,e^{0{,}0573t}$

$\dfrac{99900}{100} = e^{0{,}0573t}$

$\ln(999) = 0{,}0573t$

$\dfrac{\ln(999)}{0{,}0573} = t$

$t \approx 120{,}5$ min

Kommentar: Elevlösningen visar insikt om att antalet bakterier som funktion av tiden ges av $f(x) = \dfrac{5{,}73e^{0{,}0573t}}{0{,}0573} + C.$ Lösningen tar hänsyn till att antalet bakterier är 100 då $t = 0$ men bestämningen av konstanten är felaktig. Elevlösningen ges därmed en begreppspoäng och en problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 3 (1 A_B, 1 A_{PL} och 1 A_K)

Om $f(t) = 5{,}73\,e^{0{,}0573t}$ beskriver hur antalet bakterier förändras per gram så kommer dess primitiva funktion $F(t)$ att beskriva antalet bakterier som finns per gram.

$$F(t) = \frac{5{,}73e^{0{,}0573t}}{0{,}0573} + C$$

Vid tillagning, då $t=0$, finns det 100 bakterier/g lax

Alltså är $F(0) = 100$.

$$100 = \frac{5{,}73\,e^{-0{,}0573\cdot 0}}{0{,}0573} + C \Rightarrow C = 100 - \frac{5{,}73e}{0{,}0573} = 100 - 100e$$

$$C = 100 - 100e \Rightarrow F(t) = \frac{5{,}73e^{0{,}0573t}}{0{,}0573} + 100 - 100e =$$

$$= 100e^{0{,}0573t} + 100 - 100e$$

Om gränsen är 100000 bakterier så kommer $F(t) = 100000$ när det blir farligt att äta laxen.

$$F(t) = 100000 = 100e^{0{,}0573t} + 100 - 100e \Rightarrow 1000 = e^{0{,}0573t} + 1 - e$$

$$999 + e = e^{0{,}0573t}$$

$$\ln(999+e) = 0{,}0573t \Rightarrow t = \frac{\ln(999+e)}{0{,}0573} \approx 121 \text{ min}$$

Svar: Det tar c:a 121 min innan laxen gör en matförgiftad.

Kommentar: Elevlösningen visar insikt om att antalet bakterier som funktion av tiden ges av $f(x) = \dfrac{5{,}73e^{0{,}0573t}}{0{,}0573} + C.$ Lösningen tar hänsyn till att antalet bakterier är 100 då $t = 0$ men bestämningen av konstanten är felaktig. När det gäller kommunikation är elevlösningen lätt att följa och förstå eftersom funktionsbeteckningar är tydligt definierade, resonemangen kring bestämning av primitiv funktion och konstanten C är utskrivna och symboler används korrekt, med god anpassning till syfte och situation. Sammantaget ges elevlösningen en begrepps-, en problemlösnings- och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 4 (1 A_B och 2 A_{PL})

$y = C \cdot a^t$

t = antal år
C = 100 = startmängd
a = förändringsfaktor

$v = \frac{\text{antal bakterier}}{\text{min}}$

$v(t) = N'(t) \rightarrow V(t) = 5{,}73 \cdot e^{0{,}0573t}$ eftersom funktionen har en hastighet bakterier/g/min

primitiv till $v(t) = N(t)$ $\rightarrow N(t) = \frac{5{,}73 \cdot e^{0{,}0573t}}{0{,}0573} + C$

N = antal bakterier

$N(t) = 100 \cdot e^{0{,}0573t} + C$

$e^{0{,}0573} = a =$ förändringsfaktorn

$N(t) = 100 \cdot 1{,}05897^t + C$

$N(0) = 100$ alltså måste $C = 0$

$100\,000 = 100 \cdot 1{,}05897^t$

$1000 = 1{,}05897^t$

$t = 120{,}55 \approx 120$ min

Svar: 120 min tar det innan det finns 100 000 st bakterier/g i laken.

Kommentar: Elevlösningen visar en metod för att bestämma tiden. När det gäller kommunikation så anses inte elevlösningen vara lätt att följa och förstå. Det beror främst på byte av funktionsbeteckning i inledningen, att *C* används med två olika betydelser och att det inte visas hur slutekvationen löses. Sammantaget ges elevlösningen en begreppspoäng och två problemlösningspoäng på A-nivå.

Uppgift 24a

Elevlösning 1 (1 A_M)

a) $D = 1 \cdot x + 40 \cdot 30 \cdot 0{,}98^x$

Kommentar: Elevlösningen innehåller faktorn $30 \cdot 0{,}98^x$ och uppfyller därmed kraven för en modelleringspoäng på A-nivå.