Part B	Problems 1-11 which only require answers.
Part C	Problems 12-16 which require complete solutions.
Test time	120 minutes for Part B and Part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 67 points of which 26 E-, 23 C- and 18 A-points.

Level requirements for test grades
E: 19 points
D: 28 points of which 8 points on at least C-level
C: 36 points of which 15 points on at least C-level
B: 46 points of which 6 points on A-level
A: 54 points of which 10 points on A-level

The number of points you can have for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge level(s) (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled "*Only answers required*" you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thoughts and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational program on all the sheets you hand in.

Name: ______________________________

Date of birth: ______________________________

Educational program: ______________________________

Part B: Digital resources are not allowed. *Only answer is required*. Write your answers in the test booklet.

1. Find *all* antiderivatives of $f(x) = x^2$ _______________ (1/0/0)

2. Simplify as far as possible

a) $\dfrac{3x+24}{2x+16}$ _______________ (1/0/0)

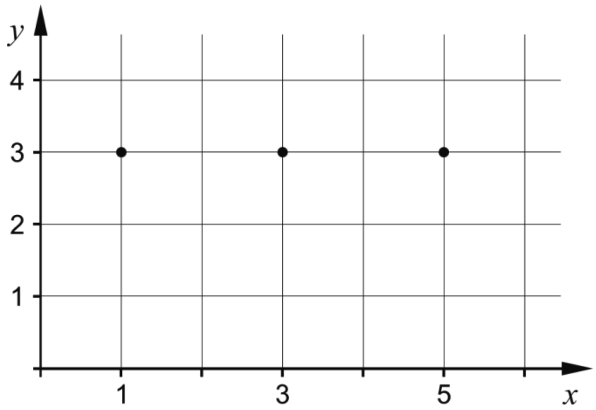
b) $x(x^8+2)+2x^9-2x$ _______________ (1/0/0)

3. How many terms are there in the geometric sum below?

$2+2\cdot 0.1+2\cdot 0.1^2+2\cdot 0.1^3+...+2\cdot 0.1^{17}$ _______________ (1/0/0)

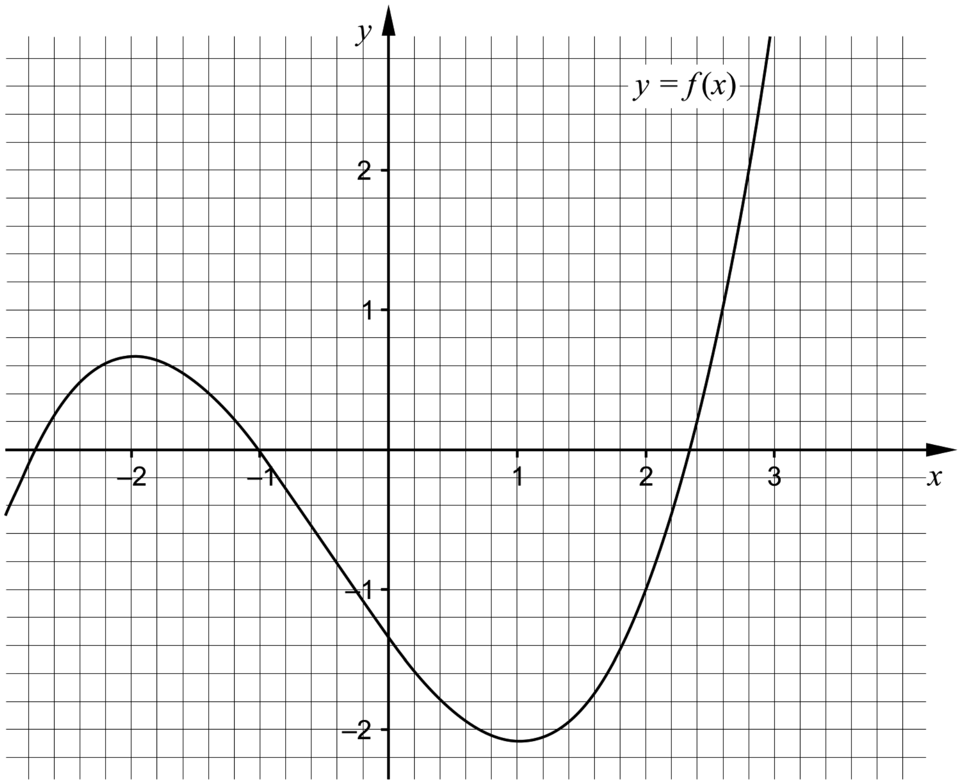
4. The function f is continuous. In the coordinate system below, sketch what the graph of f might look like if it holds that:

- The graph passes through the indicated points $(1, 3)$, $(3, 3)$ and $(5, 3)$
- $f'(1) > 0$
- $f'(3) < 0$
- $f'(5) > 0$



(1/0/0)

5. The figure shows the graph of the cubic function *f*.
Solve the equation $f(x) = 2$ graphically. _______________________ (1/0/0)



6. Determine $f'(x)$

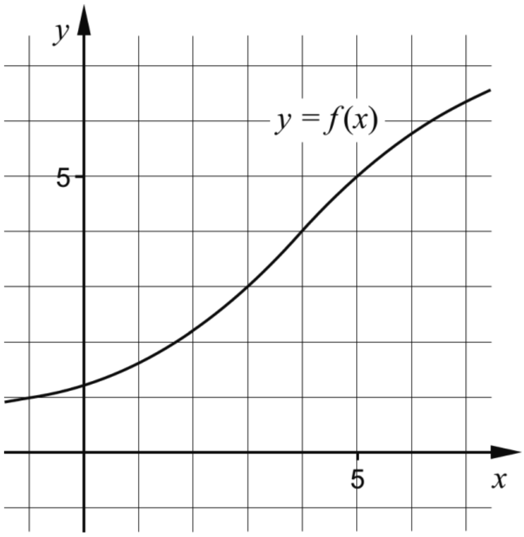
a) $f(x) = 3x^4 - 7x + 5$ _______________________ (1/0/0)

b) $f(x) = x^k + k$ _______________________ (0/1/0)

c) $f(x) = \dfrac{x + 5x^2}{x}$ _______________________ (0/1/0)

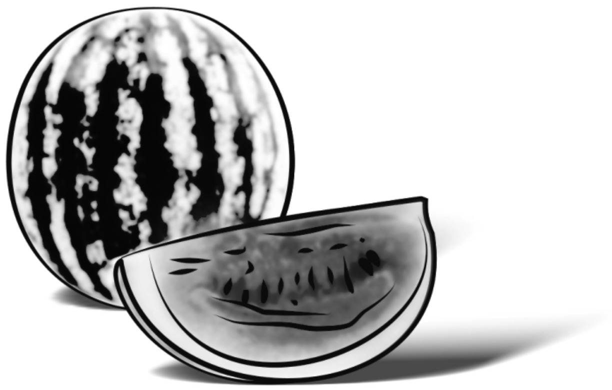
7. The figure shows the graph of the function *f*. Find an approximate value of

$$\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$$



_______________________ (0/1/0)

8. The function f describes how the weight of a growing water melon y depends on the time t, that is $y = f(t)$. The weight y is given in hg (hectograms) and the time t in weeks.



What do you find out by calculating $f'(3)$?
Choose one of the alternatives A-E. _______________________ (0/1/0)

A. The weight in hg that the watermelon has at the time 3 weeks.

B. The increase in weight of the watermelon over 3 weeks.

C. The average increase in weight of the watermelon in hg/week over 3 weeks.

D. The time it takes for the weight of the watermelon to increase to 3 hg.

E. The increase in weight of the watermelon in hg/week at the time 3 weeks.

9. a) Give an example of a polynomial function f of degree four for which it holds that $f(1)=4$

_______________________ (0/1/0)

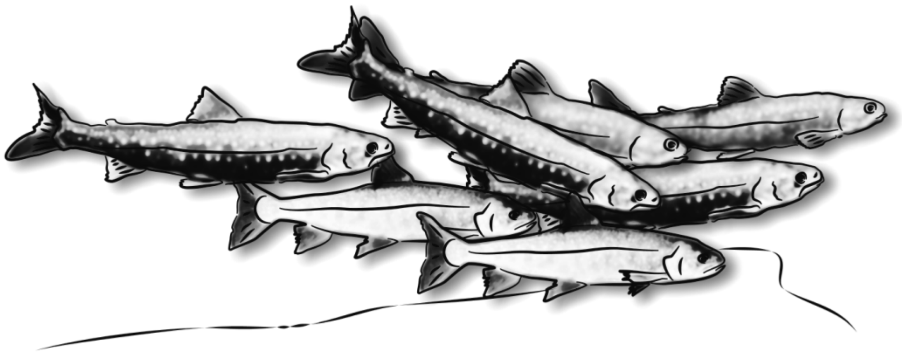
b) There are several rational expressions that satisfy the following conditions:

- The expression has the value 0 when $x=-1$
- The expression is not defined for $x=3$
- The expression is not defined for $x=-4$

Give an example of a rational expression that satisfies all three conditions. _______________________ (0/1/1)

10. A species of fish that was not there previously is planted in a lake.
The population of fish can be described by the relation

$N(t)=\dfrac{15000}{3+2e^{-0.5\cdot t}}$ where N is the number of fish and t is the time in years after the planting.



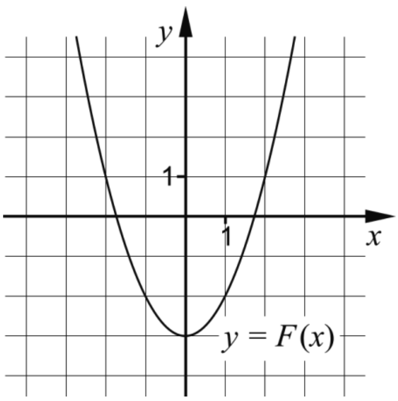
a) How many fish were planted in the lake in the beginning?

_______________________ (0/1/0)

b) Due to different environmental factors, there is a limit to the number of fish. Calculate the upper limit for the number of fish by using the relation.

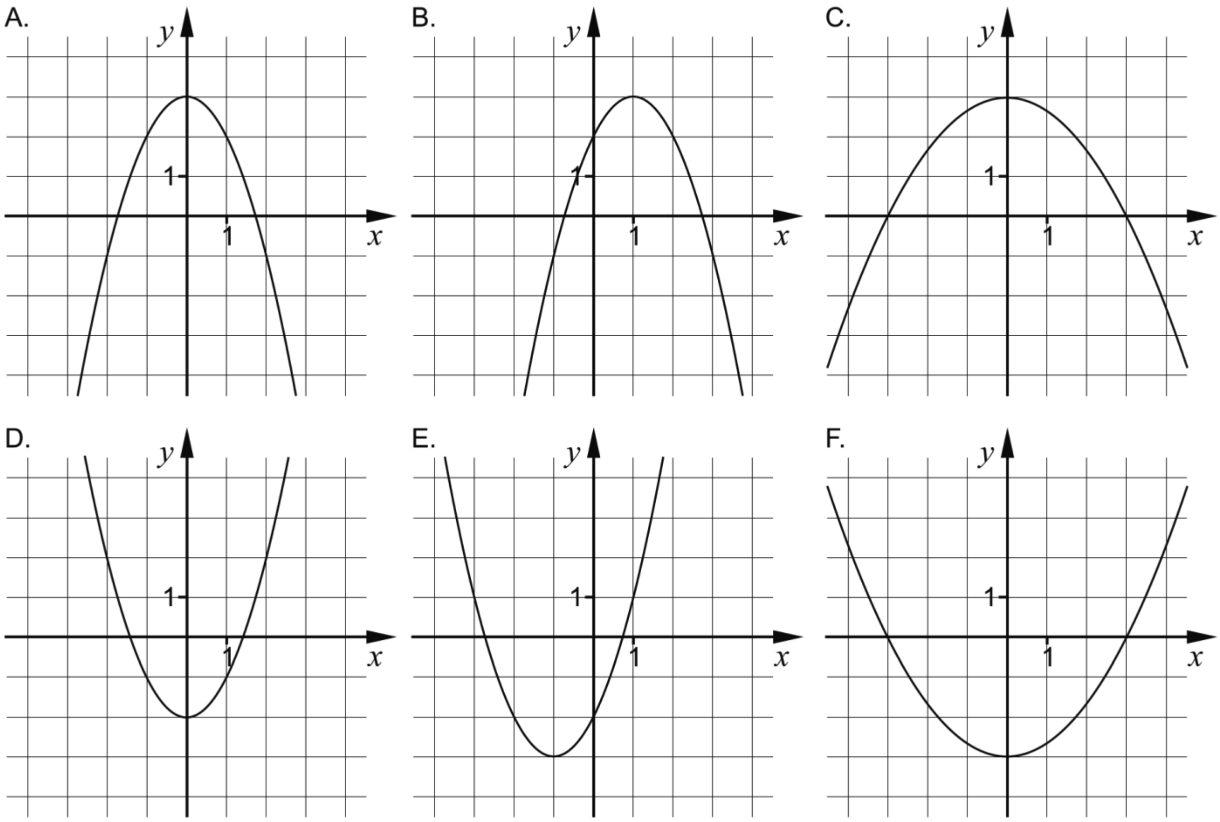
_______________________ (0/0/1)

11. The function f has an antiderivative F. The graph of F can be seen in the figure below.



a) Which of the graphs A-F shows another antiderivative of f ?

________________________ (0/1/0)



Another function g has an antiderivative G. One of the graphs A-F shows the antiderivative G.

b) Which of the graphs A-F shows G if $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 3$?

________________________ (0/0/1)

Part C: Digital resources are not allowed. Write your solutions on separate sheets of paper.

12. Calculate $\int_{1}^{2} 3x^2 \, dx$ algebraically. (2/0/0)

13. A gardener is making a flower bed around the corner of a house. Along the sides not bordering the house, she will lay some lawn-edging, see figure 1. She wants to design the flower bed so that the sides BC and CD have the same length, see figure 2.

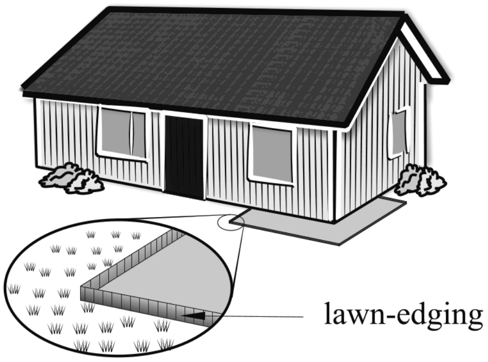


figure 1

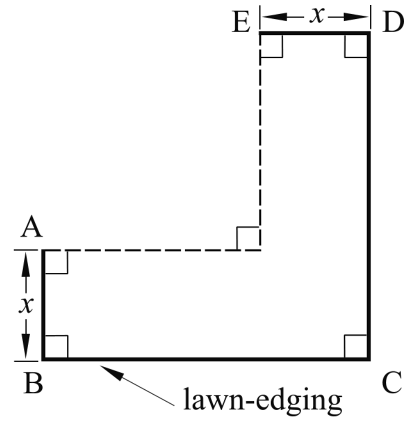


figure 2

In the gardener's shed there is a roll of lawn-edging enough for 6 m and she is planning on using all the lawn-edging. The area of the flower bed is then $A(x) = 6x - 3x^2$
where x is the width of the flower bed in metres, see figure 2.

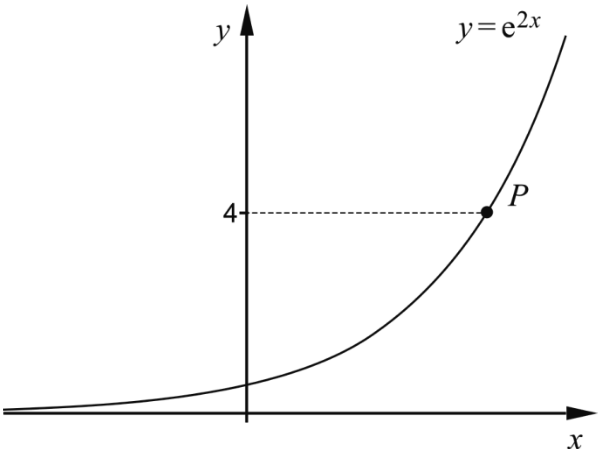
a) The gardener wants the flower bed to have as large area as possible. Use the derivative to calculate the width x that gives the maximum area. (2/0/0)

b) What values can the area A have in this context? (1/2/0)

c) Show that the area of the flower bed in figure 2 can be described by $A(x) = 6x - 3x^2$ if the gardener uses 6 m of lawn-edging. (0/1/2)

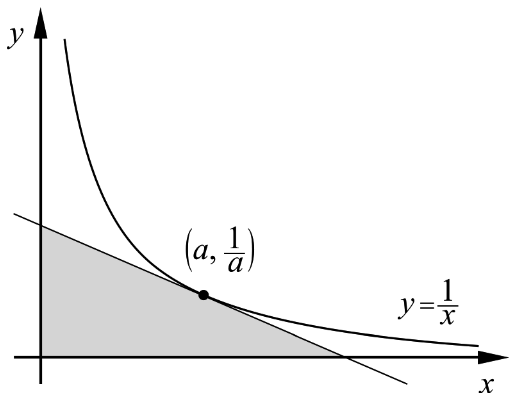
14. Calculate $\dfrac{(x+8)^6 - (x+8)^5}{(x+8)^5}$ when $x = 2.7$
Give an exact answer. (0/2/0)

15. The curve to $y = e^{2x}$ is drawn in the figure below. The point P has the y-coordinate 4



Calculate the gradient of the curve at the point P.
Give an exact answer and simplify it as far as possible. (0/3/0)

16. Prove that the triangle bounded by the positive coordinate axes and a tangent of the curve $y = \frac{1}{x}$ has an area of 2 area units, *regardless* of where the tangent touches the curve.



Assume that the tangential point has coordinates $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ (0/1/3)

Part D	Problems 17-24 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital resources, formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 67 points of which 26 E-, 23 C- and 18 A-points.

Level requirements for test grades
E: 19 points
D: 28 points of which 8 points on at least C-level
C: 36 points of which 15 points on at least C-level
B: 46 points of which 6 points on A-level
A: 54 points of which 10 points on A-level

The number of points you can have for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge level(s) (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled "*Only answers required"* you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thoughts and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

Write your name, date of birth and educational program on all the sheets you hand in.

Name: ______________________________

Date of birth: ______________________________

Educational program: ______________________________

Part D: Digital resources are allowed. Write your solutions on separate sheets of paper.

17. Newborn babies normally decrease in weight during the first days, then the weight starts to increase. After three days the weight is at its lowest.

According to a simplified model, the weight of a newborn baby can be described by $V(t) = 5t^3 - 135t + 3500$
where V is the weight in grams and t is the time in days after the birth.

a) How much does a baby on average decrease in weight during the first three days? (2/0/0)

b) Evaluate how well the model corresponds to reality when the baby is a few weeks old. (2/0/0)

18. It holds for the function f that $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ and that f is defined in the interval $0 \leq x \leq 4$. Calculate the global minimum and maximum of the function. (2/0/0)

19. It holds for a function f where $y = f(x)$ that $f(3) = 4$ and $f'(3) = 2.4$
Lotta thinks for a while and then says:

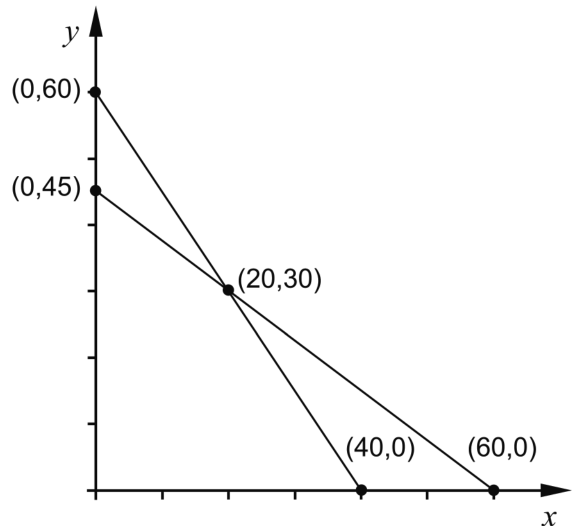
– If it is a straight line, then f(100) must be exactly 244

Investigate whether Lotta's statement is correct. (2/0/0)

20. A tailor is going to produce lined suits and lined woolen jackets. For each suit he needs 1.5 m of lining and 3 m of wool fabric. For each jacket he needs 2 m of each kind of fabric. The tailor has 90 m of lining and 120 m of wool fabric. Assume that the tailor will manufacture and sell x suits and y jackets. It then holds that:

$$\begin{cases} 1.5x + 2y \leq 90 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

The figure below shows the graphs of the lines $1.5x + 2y = 90$ and $3x + 2y = 120$ as well as five points plotted.



The tailor wants to make as much profit as possible and writes down the profit function $V = 300x + 250y$ where V is the total profit in SEK.

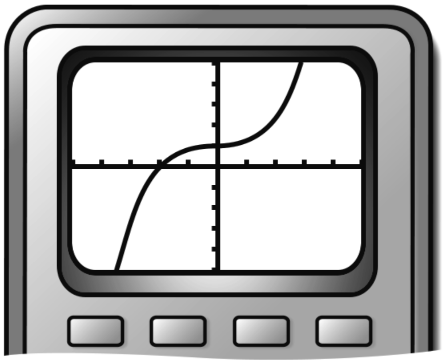
a) Explain what the numbers 300 and 250 in the profit function mean in this context. (1/0/0)

b) Calculate the largest possible profit the tailor can make. (2/1/0)

21. In a geometric sum with 10 terms there is a term 40.5 and after that the following term 121.5
Calculate the value of the first term if the sum is 14762 (0/2/0)

22. Peder draws the graph of $f(x) = x^3 + 0.03x + 1$ on his graphic calculator and says:

–I see that the graph has a saddle point.



Investigate whether he is right. (0/2/0)

23. Fredrik and Gustav participate in the same bicycle race. The race is over a distance of 90 km. Fredrik maintains a constant speed throughout the race while Gustav's speed varies. Simplified, the distance (in km) they have cycled can be described by the functions:

$f(t) = 30t$ and $g(t) = t^3 - 6t^2 + 37.8t$

where t is the time in hours after the start.

Fredrik and Gustav start at the same time. Fredrik finishes first. He crosses the finish line exactly 3 hours after the start.

How long after the start is the distance between Fredrik and Gustav the greatest and how great is the distance between them at that time? (0/0/4)

24. S is a continuous function defined for all x.
Determine $S'(4)$ when $S(x+h) = S(x) + h$ (0/0/3)

To the student - Information about the oral part

You will be given a problem that you will solve in writing, and then you will present your solution orally. If you need, you can ask your classmates and your teacher for help when solving the problem. Your oral presentation starts with you presenting what the problem is about and then you describe and explain your solution. You must present all steps in your solution. However, if you have done the same calculation several times (for example in a table) it might be sufficient if you present some of the calculations. Your presentation should take a maximum of 5 minutes, and be held to a smaller group of your classmates and your teacher.

The problem given to you should, on the whole, be solved algebraically. You might need a calculator to do some of the calculations but, when presenting your solution, you should avoid referring to the use of your calculator for drawing graphs and/or symbolic handling (if that is the type of calculator you are using).

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

How complete, relevant and structured your presentation is

Your presentation must contain the necessary parts in order for a listener to follow and understand your thoughts. What you say should be in a suitable order and be relevant. The listener must understand how calculations, descriptions, explanations and conclusions are connected with each other.

How well you describe and explain the train of thought behind your solution

Your presentation should contain both descriptions and explanations. To put it simple, a description answers the question *how* and an explanation answers the question *why*. You describe something when you for instance tell *how* you have done a calculation. You explain something when you for instance justify *why* you could use a certain formula.

How well you use the mathematical terminology

In your presentation you should use a language that contains mathematical terms, expressions and symbols, suitable for the problem you have solved.

Mathematical terms are for example words like “exponent”, “function” and “graph”.
An example of a mathematical expression is that x^2 is read “*x* to the power 2” or “*x* squared”.
Some examples of mathematical symbols are π and $f(x)$, which are read “pi” and “*f* of *x*”.

Problem 1. Jewellery

Name:______________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:
- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

A gold- and silver smith is planning to make pieces of jewellery that are called Ring and Heart. Ring is made of 3 g of gold and 6 g of silver. Heart is made of 2 g of gold and 8 g of silver. The smith has 54 g of gold and 120 g of silver which should be enough for a number of Rings and Hearts.

	Ring (g/piece)	Heart (g/piece)	Total (g)
Gold	3	2	54
Silver	6	8	120

When selling the smith makes a profit of SEK 100 for each Ring and SEK 120 for each Heart. Assume that the smith makes x pieces of Ring and y pieces of Heart.

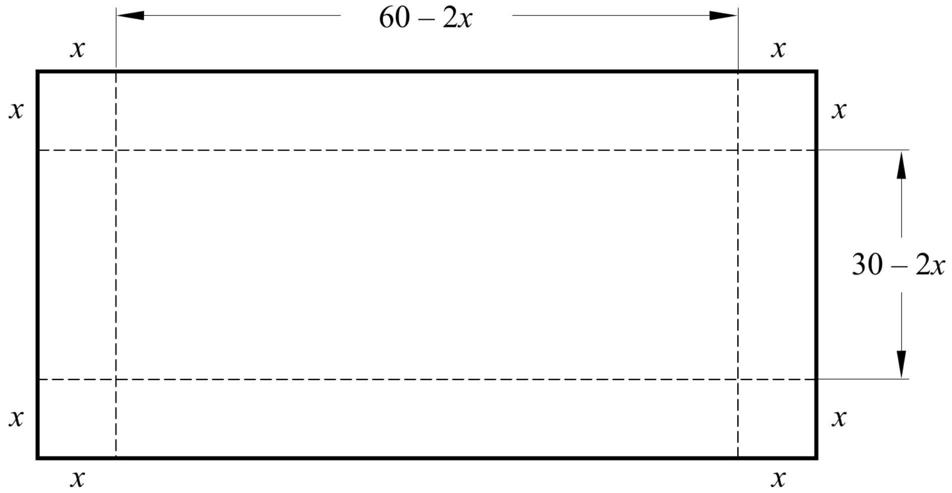
How many Ring and Heart should the smith make in order to make as large profit as possible?

Problem 2. The Box

Name:______________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:
- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

Jonas is making a box without a lid from a rectangular piece of cardboard with measures 60 cm × 30 cm. He is going to cut out squares of equal size at the corners and then folding the sides. In the figure the squares have the side x.



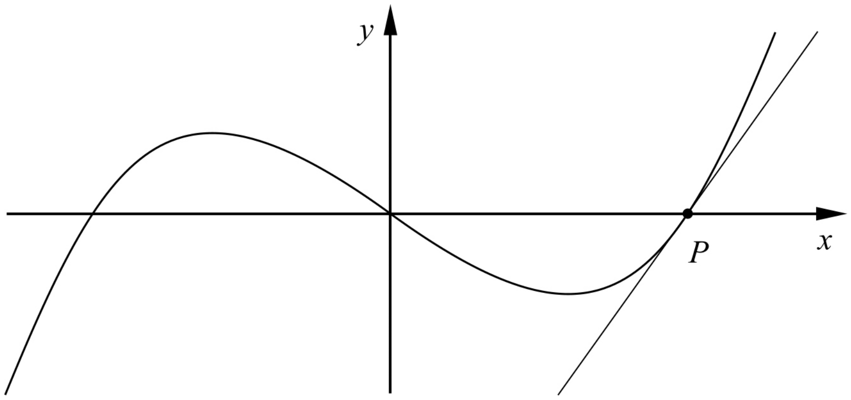
Help Jonas calculate the side x in order to make the volume of the box as large as possible.

Problem 3. Tangent

Name:______________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:
- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

The figure below shows the graph of the function $f(x) = x(x-3)(x+3)$ and a tangent whose tangent point P lies in one of the function's zeroes.



a) Determine the zeroes of the function.

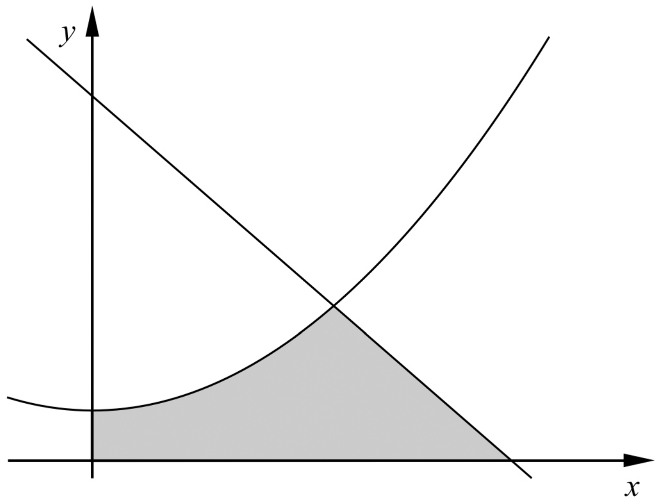
b) Determine the equation of the tangent.

Problem 4. Area

Name:______________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:
- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

A region is bounded by the coordinate axes, the line $y = 42 - 12x$ and the curve $y = 3x^2 + 6$



Calculate the area of the region.

Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	**E**	**C**	**A**	**Max**
Fullständighet, relevans och struktur Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.	Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig. (1/0/0)		Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår. Redovisningen är välstrukturerad. (1/0/1)	(1/0/1)
Beskrivningar och förklaringar Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.	Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar. Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad. (1/0/0)		Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar. (1/0/1)	(1/0/1)
Matematisk terminologi Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen. (1/0/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen. (1/1/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen. (1/1/1)	(1/1/1)
Summa				(3/1/3)

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt olika modeller:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga
Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska
1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan innehålla något ovidkommande eller sakna något steg. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska
1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

Förutom den allmänna beskrivningen av kraven kan ibland mer utförliga beskrivningar ges i samband med de bedömda elevlösningar där kommunikationspoäng förekommer.

Provsammanställning - Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3b i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 9b_1 och 9b_2 den första respektive andra poängen i uppgift 9b.

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del A	M_1				1								
	M_2												1
	M_3				1								
	M_4												1
	M_5				1								
	M_6								1				
	M_7												1
Del B	1	1											
	2a		1										
	2b		1										
	3	1											
	4	1											
	5			1									
	6a		1										
	6b						1						
	6c						1						
	7					1							
	8					1							
	9a					1							
	9b_1					1							
	9b_2									1			
	10a							1					
	10b											1	
	11a					1							
	11b									1			
Del C	12_1		1										
	12_2		1										
	13a_1		1										
	13a_2		1										
	13b_1		1										
	13b_2							1					
	13b_3								1				
	13c_1							1					
	13c_2											1	
	13c_3												1
	14_1						1						
	14_2						1						
	15_1							1					
	15_2							1					
	15_3								1				

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del C	16_1						1						
	16_2												1
	16_3												1
	16_4												1
Del D	17a_1			1									
	17a_2			1									
	17b_1			1									
	17b_2			1									
	18_1	1											
	18_2	1											
	19_1				1								
	19_2				1								
	20a			1									
	20b_1			1									
	20b_2			1									
	20b_3								1				
	21_1							1					
	21_2							1					
	22_1								1				
	22_2								1				
	23_1											1	
	23_2											1	
	23_3											1	
	23_4												1
	24_1											1	
	24_2											1	
	24_3												1
	Total	**5**	**8**	**8**	**5**	**5**	**5**	**7**	**6**	**2**	**0**	**7**	**9**
Σ	**67**	**26**				**23**				**18**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning - Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3b i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma3b															
					Algebra		Samband och förändring											Problem-lösning		
		E	C	A	A1	A2	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	P1	P3	P4
Del A		3	1	3																
Del B	1	1	0	0												X				
	2a	1	0	0	X															
	2b	1	0	0	X															
	3	1	0	0			X													
	4	1	0	0				X	X	X					X					
	5	1	0	0		X			X									X		
	6a	1	0	0						X	X									
	6b	0	1	0						X	X									
	6c	0	1	0	X					X	X									
	7	0	1	0												X	X			
	8	0	1	0						X										
	9a	0	1	0	X															
	9b	0	1	1	X															
	10a	0	1	0								X								
	10b	0	0	1				X				X								
	11a	0	1	0												X				
	11b	0	0	1												X	X			
Del C	12	2	0	0												X	X			
	13a	2	0	0						X	X		X	X	X					
	13b	1	2	0										X						
	13c	0	1	2	X									X						
	14	0	2	0	X															
	15	0	3	0						X	X	X	X		X			X		
	16	0	1	3						X	X		X		X					
Del D	17a	2	0	0	X				X	X								X	X	
	17b	2	0	0	X				X	X	X		X							
	18	2	0	0					X	X	X			X	X					
	19	2	0	0						X					X					
	20a	1	0	0			X													
	20b	2	1	0			X											X	X	
	21	0	2	0			X											X		
	22	0	2	0					X	X	X		X	X	X					
	23	0	0	4						X	X		X	X	X			X	X	
	24	0	0	3				X		X	X		X		X			X		
Total		26	23	18																

Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 26 E-, 23 C- och 18 A-poäng. Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla fyra delprov.

Kravgräns för provbetyget
E: 19 poäng
D: 28 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 36 poäng varav 15 poäng på minst C-nivå
B: 46 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 54 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Del B

1.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar ($F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C$)	+1 E_B
2.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar (1,5)	+1 E_P
b)	Korrekt svar ($3x^9$)	+1 E_P
3.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (18)	+1 E_B
4.		**Max 1/0/0**
	Godtagbart ritad graf	+1 E_B
	Se avsnittet Bedömda elevlösningar.	
5.		**Max 1/0/0**
	Godtagbart svar ($x=2{,}8$)	+1 E_{PL}
6.		**Max 1/2/0**
a)	Korrekt svar ($f'(x)=12x^3-7$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar ($f'(x)=kx^{k-1}$)	+1 C_P
c)	Korrekt svar ($f'(x)=5$)	+1 C_P

7. **Max 0/1/0**

Godtagbart svar (8) +1 C_B

8. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (Alternativ E: ”Vattenmelonens viktökning i hg/vecka vid tiden 3 veckor.”) +1 C_B

9. **Max 0/2/1**

a) Korrekt svar (t.ex. $f(x) = x^4 + 3x$) +1 C_B

b) Godtagbar ansats, anger ett rationellt uttryck som uppfyller det första *eller* det andra och det tredje villkoret, t.ex. $\dfrac{x}{2(x+4)(x-3)}$ +1 C_B

med alla tre villkor uppfyllda, $\left(\text{t.ex.} \dfrac{x+1}{(x+4)(x-3)}\right)$ +1 A_B

10. **Max 0/1/1**

a) Korrekt svar (3000) +1 C_M

b) Korrekt svar (5000) +1 A_M

11. **Max 0/1/1**

a) Korrekt svar (D) +1 C_B

b) Korrekt svar (E) +1 A_B

Del C

12. **Max 2/0/0**

	Korrekt bestämning av primitiv funktion	+1 E_P
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (7)	+1 E_P

13. **Max 3/3/2**

a)	Korrekt bestämning av derivatans nollställe, $x = 1$	+1 E_P
	med godtagbar verifiering av maximum	+1 E_P
b)	Korrekt beräkning av maximal area, 3 m^2	+1 E_P
	med korrekt angiven värdemängd, t.ex. i ord, där det framgår att arean är större än 0 m^2 och mindre än eller lika med 3 m^2	+1 C_M
	där svaret uttrycks med korrekt använda olikhetstecken ($0 < A \leq 3$)	+1 C_K
	Kommentar: Ett svar som inkluderar arean noll (t.ex. $0 \leq A \leq 3$) bedöms vara godtagbart eftersom både arean noll och väldigt små areor är lika orimliga i detta sammanhang.	
c)	Godtagbar ansats, tecknar sidan *BC* (eller *CD)* uttryckt i *x eller* arean uttryckt i två variabler, t.ex. $BC = 3 - x$ eller $A = xy + x(y - x)$	+1 C_M
	med korrekt slutförd härledning av uttrycket för arean	+1 A_M
	Lösningen (deluppgift c) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara =, parenteser, bråkstreck, $A(x)$, x och y, index, figur med införda beteckningar, termer såsom area, sida samt angivna enheter etc.	+1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

14. **Max 0/2/0**

	Godtagbar ansats, korrekt faktorisering t.ex. $\dfrac{10{,}7^5(10{,}7 - 1)}{10{,}7^5}$	+1 C_P
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (9,7)	+1 C_P

15. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer x-koordinaten för punkten P, $x = \frac{\ln 4}{2}$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar på enklaste form (8) +1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara =, $f(x)$, $f'(x)$, $f(x) = 4$ och $f'(\frac{\ln 4}{2})$ samt termer såsom derivata, punkt, x-koordinat, y-koordinat, tangent, riktningskoefficient, lutning etc. +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

16. **Max 0/1/3**

Godtagbar ansats, korrekt bestämning av $f'(a)$, $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ +1 C_P

med godtagbar fortsättning som inkluderar konstruktiv användning av tangeringspunktens koordinater, t.ex. korrekt bestämning av tangentens ekvation $y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$ +1 A_R

med ett i övrigt godtagbart genomfört bevis +1 A_R

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara =, $f(x)$, $f'(x)$, $f'(a)$, bråkstreck, figur med införda beteckningar, termer såsom koordinater, tangent, lutning, riktningskoefficient, derivata, x-axel, y-axel, triangel, höjd, bas, areaenheter samt hänvisning till tangentens ekvation etc. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Del D

17. **Max 4/0/0**

a) Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer $V(0)$ och $V(3)$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (90 g/dygn) +1 E_{PL}

Kommentar: Även svaret –90 g/dygn bedöms som godtagbart.

b) Godtagbar ansats till utvärdering av modellen, t.ex. beräknar $V(17)$ +1 E_M

med godtagbar kommentar, som utgående från beräkning av t.ex. $V(17)$ med korrekt enhet, visar insikt om att vikten eller viktökningen är orimligt hög +1 E_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

18. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, visar insikt om vilka x-värden som ska undersökas:
$x = 0$, $x = 2$ och $x = 4$ (vid algebraisk lösning) eller
$x = 2$ och $x = 4$ (vid grafisk lösning) +1 E_B

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (Minsta värdet är –2 och största värdet är 18) +1 E_B

Kommentar: Om svaren anges i koordinatform alternativt både i korrekt form och koordinatform (t.ex. ”Största värdet är 18 eller (4, 18)”) utdelas inte den andra E_B -poängen.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

19. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, inleder ett enkelt resonemang genom att t.ex. undersöka linjens lutning utifrån de givna punkterna (3, 4) och (100, 244) +1 E_R

med godtagbart slutfört resonemang med korrekt slutsats (t.ex. ”Linjens lutning blev 2,47 så hon har fel.”) +1 E_R

20. **Max 3/1/0**

a) Godtagbar förklaring som visar insikt om att 300 och 250 motsvarar vad respektive plagg bidrar med till den totala vinsten (t.ex. ”300 och 250 är vad han tjänar på de olika klädesplaggen.”) $+1\ E_M$

b) Godtagbar ansats, väljer korrekt de punkter som ska tas med i beräkningen: (0, 45), (20, 30) och (40, 0) $+1\ E_{PL}$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (13500 kr) $+1\ E_{PL}$

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara =, ≥, parenteser, figur och termer såsom rät linje, område, koordinatsystem, olikheter, skärningspunkt samt angivna enheter etc. $+1\ C_K$

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

21. **Max 0/2/0**

Godtagbar bestämning av kvoten, $k = 3$ $+1\ C_{PL}$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (0,5) $+1\ C_{PL}$

22. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, inleder ett välgrundat resonemang genom att använda en undersökningsmetod som kan ge väl underbyggda slutsatser, t.ex. undersöker på sin grafräknare om derivatans graf har några nollställen $+1\ C_R$

med godtagbart slutfört resonemang med korrekt slutsats (t.ex. ”Grafen till derivatan blir aldrig noll, så det är ingen terrasspunkt”) $+1\ C_R$

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

23. **Max 0/0/4**

Godtagbar ansats, t.ex. bildar avståndsfunktionen $h(t)=t^3-6t^2+7{,}8t$ och bestämmer derivatans nollställen, $t_1 \approx 3{,}18$ och $t_2 \approx 0{,}82$ +1 A_{PL}

med godtagbar fortsättning, inser att intervallets ändpunkt, då $t=3$, måste kontrolleras +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (3,6 km då $t=3\,\text{h}$) +1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara =, $\approx$, <, $\leq$, $\pm$, $\sqrt{\ }$, $f(t)-g(t)$, $f'(t)$, $f(3)-g(3)$, index, bråkstreck, parenteser, figur, termer såsom graf, punkt, funktion, definitionsmängd, maximipunkt, minimipunkt, teckenschema, ändpunkt samt angivna enheter etc. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

24. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar $S'(4)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{S(4+h)-S(4)}{h}$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (1) +1 A_{PL}

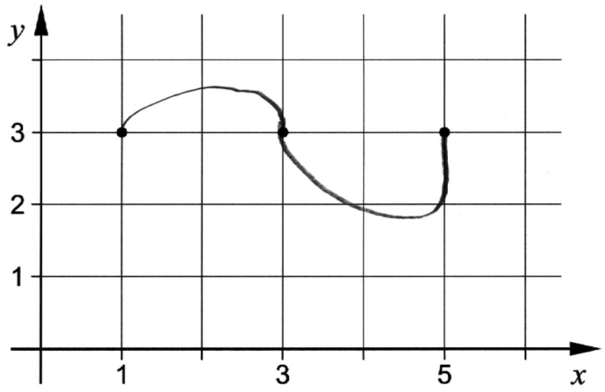
Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara =, bråkstreck, $S'(x)$, $S'(4)$, $S(x+h)$, $S(4+h)$, $S(4)$, $\lim\limits_{h\to 0}$, figur med införda beteckningar, termer såsom rät linje, x-led, y-led, ändringskvot, punkt, lutning, avstånd samt hänvisning till derivatans definition etc. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

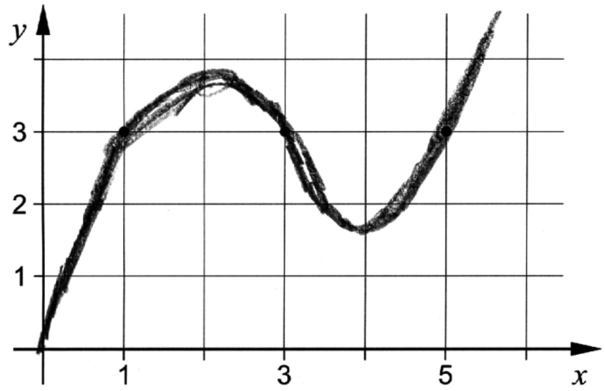
Bedömda elevlösningar

Uppgift 4

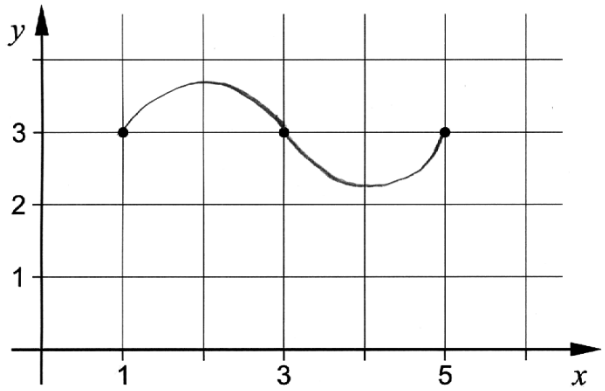
Elevlösning 1 (0 poäng)



Elevlösning 2 (1 E_B)



Elevlösning 3 (1 E_B)



Kommentar: Eftersom det inte går att avgöra om derivatan är positiv eller negativ i punkterna (3, 3) och (5, 3) ges elevlösning 1 noll poäng. Elevlösning 2 och 3 visar godtagbara grafer men ges nätt och jämnt en begreppspoäng på E-nivå. Det beror på att graf 2 ser ut att bestå av flera grafer och graf 3 är inte ritad för $x < 1$ och $x > 5$.

Uppgift 13c

Elevlösning 1 (1 C_M och 1 A_M)

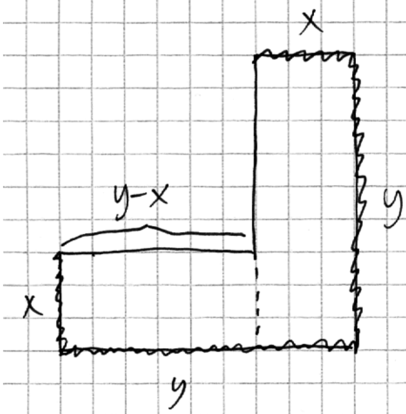
Visa $A(x) = 6x - 3x^2$

$$A(x) = (BC - x)x \cdot 2 + x^2 = \left(\frac{6-2x}{2} - x\right)x \cdot 2 + x^2$$

$$= (3 - 2x)x \cdot 2 + x^2 = 6x - 3x^2$$

Kommentar: Eftersom elevlösningen inte innehåller någon figur med införda beteckningar och motivering till varför $BC = \dfrac{6-2x}{2}$ saknas, blir lösningen svår att följa och förstå. Sammantaget ges elevlösningen modelleringspoängen på både C- och A-nivå, men inte kommunikationspoängen på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 C_M, 1 A_M och 1 A_K)



De långa sidorna är y

Då ska 6m gräskant räcka

till 2x och 2y

$2x + 2y = 6$ så $y = 3 - x$

Arean blir $xy + x(y - x)$

$A = xy + xy - x^2 = 2xy - x^2$

Då blir $A(x) = 2x(3 - x) - x^2 = 6x - 2x^2 - x^2$

$$\boxed{A(x) = 6x - 3x^2}$$

Kommentar: Lösningen är lätt att följa och förstå eftersom variabler är definierade, det finns en tydlig figur och ekvationen $2x + 2y = 6$ motiveras på ett tydligt sätt. Sammantaget motsvarar lösningen både modelleringspoängen på C- och på A-nivå samt kommunikationspoängen på A-nivå.

Uppgift 15

Elevlösning 1 (1 C_{PL})

$y = e^{2x}$

$y'(x) = 2e^{2x}$

$y'\left(\frac{\ln 4}{2\ln e}\right) = 2e^{\frac{2\cdot\ln 4}{2\ln e}}$

$= 2e^{\frac{\ln 4}{\ln e}}$

$4 = e^{2x}$

$\ln 4 = \ln e^{2x}$

$\ln 4 = 2x \cdot \ln e$

$x = \frac{\ln 4}{2\ln e}$

svar: $2e^{\frac{\ln 4}{\ln e}}$

Kommentar: Det korrekta svaret är inte uttryckt på enklaste form, därmed uppfylls inte kravet för den andra problemlösningspoängen på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C_{PL} och 1 C_K)

$y = e^{2x}$

Bestäm x-koordinaten

$4 = e^{2x}$

$\ln 4 = \ln e^{2x}$

$2x = \ln 4$

$x = \ln 4/2$

Bestäm $f'(\ln 4/2)$

$y = e^{2x}$

$y'(x) = 2e^{2x}$

$y'(\ln 4/2) = 2 \cdot e^{2 \cdot \ln 4/2}$

$= 2e^{\ln 4} = 2 \cdot 4$

$= 8$

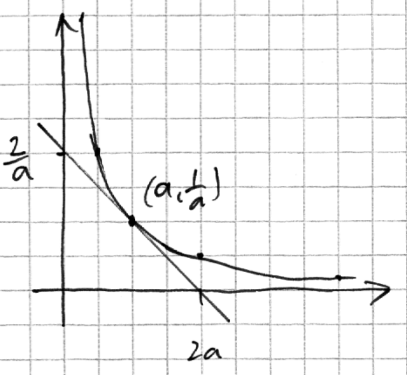
SVAR: 8

Kommentar: Elevlösningen är korrekt och svaret uttrycks på enklaste form. Kommunikationen bedöms motsvara kraven för en kommunikationspoäng på C-nivå trots att det förekommer olika beteckningssätt för derivatan.

Uppgift 16

Elevlösning 1 (0 poäng)

Eftersom kurvans funktion är $y=\frac{1}{x}$ kommer tangenten till kurvan vid punkten $(a, \frac{1}{a})$ alltid att skära y-axeln vid $2 \cdot 1/a$ och x-axeln vid $2a$



$y = 1/x$

$A = \frac{2a \cdot \frac{2}{a}}{2} = \frac{4}{2} = 2$ A.E.

Kommentar: Elevlösningen innehåller korrekt angiven skärning med *x*- och *y*-axeln, men redovisning för dessa saknas. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (0 poäng)

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$ Tangentens ekvation $y = kx + m$

Tang. punkt $(1,1)$	Tang. punkt $(0.5, 2)$	Tang. punkt $(2, 0.5)$
$k = y'(1) = -1$	$k = y'(0.5) = -4$	$k = y'(2) = -0{,}25$
$1 = -1 \cdot 1 + m$	$2 = -4 \cdot 0{,}5 + m$	$0{,}5 = -0{,}25 \cdot 2 + m$
$m = 2$, $y = -1 \cdot x + 2$	$m = 4$, $y = -4x + 4$	$m = 1$, $y = -0{,}25x + 1$
$x = 0$ ger höjd : 2	$x = 0$ ger höjd : 4	$x = 0$ ger höjd : 1
$y = 0$ ger bas : 2	$y = 0$ ger bas : 1	$y = 0$ ger bas : 4
$A = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$	$A = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$	$A = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2$

Arean blir alltså 2

Kommentar: Eftersom slutsatsen baseras på specialfall och inte en generell behandling, ges elevlösningen noll poäng.

Elevlösning 3 (1 C_P och 2 A_R)

$f(x) = \frac{1}{x}$

$= -\frac{1}{x^2}$

$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

$y = kx + m$

$\frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} \cdot a + m$

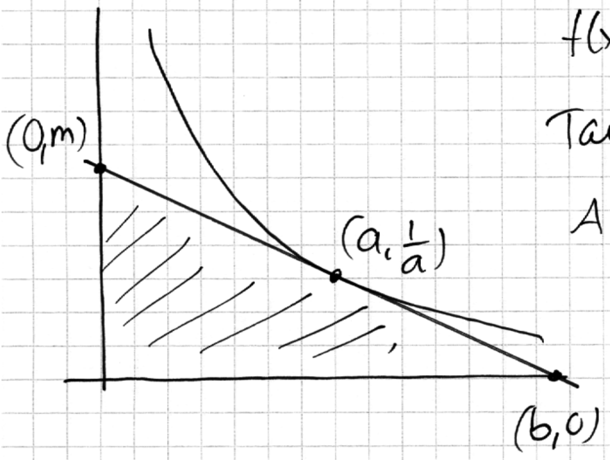
$m = \frac{2}{a}$

x-axeln : $0 = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$ $\quad x = \frac{2}{a} \cdot a^2 = 2a$

$\frac{2a \cdot \frac{2}{a}}{2} = 2$ Arean är alltid 2 areaenheter

Kommentar: Elevlösningen är korrekt och ger därför en procedurpoäng på C-nivå och två resonemangspoäng på A-nivå. Lösningen är inte välstrukturerad. Symbolhanteringen är bristfällig på andra raden där symbolen $f'(x)$ saknas. Det framgår inte heller med tydlighet hur basen och höjden i triangeln bestäms. Därmed bedöms inte lösningen uppfylla kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 4 (1 C_P, 2 A_R och 1 A_K)



$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Tangentens lutning $f'(a) = \frac{-1}{a^2} = k$

$A = \frac{b \cdot m}{2}$

$k = \frac{m - 1/a}{0 - a} = -\frac{1}{a^2}$

$m - 1/a = 1/a \Rightarrow m = 2/a$

$k = \frac{\frac{1}{a} - 0}{a - b} = -\frac{1}{a^2}$

$-a^2 \cdot \frac{1}{a} = a - b$

$b - a = a \Rightarrow b = 2a$

$A = \frac{b \cdot m}{2} = \frac{2a \cdot 2/a}{2} = 2$

Dvs. arean är alltid 2.

Kommentar: Elevlösningen är korrekt och lätt att följa och förstå. Sammantaget ges lösningen alla de poäng som uppgiften kan ge, inklusive kommunikationspoängen på A-nivå.

Elevlösning 5 (1 C_P, 2 A_R och 1 A_K)

Tangeringspunkten $= (a, \frac{1}{a})$

lutningen $y' = -x^{-2}$ och $y'(a) = -a^{-2}$

Tangentens funktion $y - y_1 = k(x - x_1)$

$y - \frac{1}{a} = -a^{-2}(x - a)$

$y - \frac{1}{a} = -a^{-2}x + a^{-1}$

$y = -a^{-2}x + \frac{1}{a} + \frac{1}{a}$

$\underline{\underline{y = -a^{-2}x + \frac{2}{a}}}$

Triangelns höjd $y = -a^{-2} \cdot 0 + \frac{2}{a} = \underline{\underline{\frac{2}{a}}}$

Trinangelns bas $0 = -a^{-2} \cdot x + \frac{2}{a}$

$a^{-2}x = \frac{2}{a}$

$a^{-1}x = 2$

$\frac{1}{a} \cdot x = 2$

$\underline{\underline{x = 2a}}$

Triangelns area $\frac{2a \cdot \frac{2}{a}}{2} = \frac{\frac{2a \cdot 2}{a}}{2} = \frac{\frac{4a}{a}}{2} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$

Triangelns area är alltid 2.

Kommentar: Elevlösningen är korrekt och lätt att följa och förstå. Trots att termen ”tangentens funktion” används uppfyller lösningen kraven för alla de poäng som uppgiften kan ge.

Uppgift 17b

Elevlösning 1 (1 E_M)

$V(t) = 5t^3 - 135t + 3500$

$V'(t) = 15t^2 - 135$

$V'(14) = 2805$ Det är inte möjligt!

Kommentar: I elevlösningen visas hur derivatan kan användas för att konstatera en orimlig viktökning dag 14. I slutsatsen framgår dock inte vad som är orimligt eftersom $V'(14)$ inte är tolkat (en viktökning på 2,8 kg/dag då $t = 14$). Sammantaget ges därför denna elevlösning en modelleringspoäng på E-nivå.

Elevlösning 2 (2 E_M)

DET ÄR INTE ENS I NÄRHETEN AV VERKLIGHETEN DÅ ETT BARN SOM ÄR 21 DAR GAMMAL SKULLE VÄGA 46,97 KG.

$(5 \cdot 21^3 - 135 \cdot 21 + 3500 = 46970)$

Kommentar: I elevlösningen konstateras en orimlig vikt dag 21. Lösningen ges de två modell-leringspoängen på E-nivå.

Uppgift 18

Elevlösning 1 (1 E_B)

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2$

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = -2$

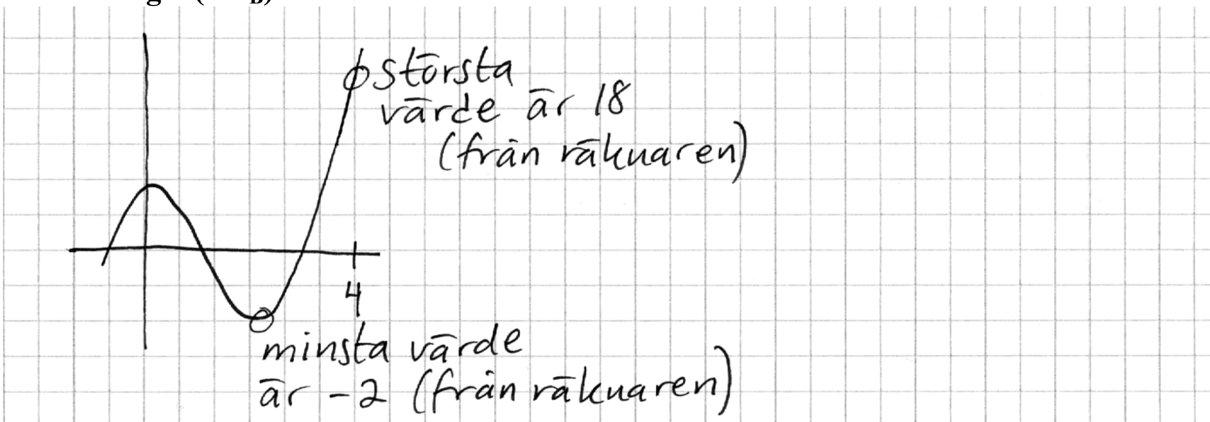
$f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 2 = 18$

minsta värde : $(2,-2)$

störst värde : $(4,18)$

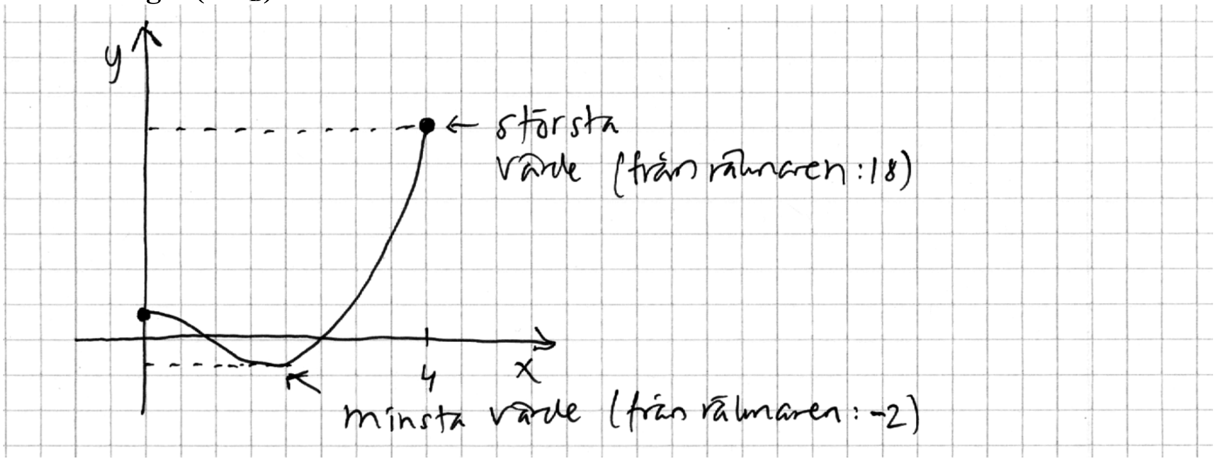
Kommentar: I elevlösningen framgår vilka funktionsvärden som behöver undersökas men svaren är angivna i koordinatform. Sammantaget motsvarar detta en begreppspoäng på E-nivå.

Elevlösning 2 (2 E_B)



Kommentar: I elevlösningen framgår att största värdet är 18 och minsta värdet är -2 . Dessa värden har bestämts med hjälp av grafräknare. Grafen är inte begränsad till det aktuella intervallet men skissen visar insikt om vilka värden som ska undersökas eftersom de relevanta punkterna är markerade. Sammantaget motsvarar denna elevlösning nätt och jämnt två begreppspoäng på E-nivå.

Elevlösning 3 (2 E_B)



Kommentar: Grafen är begränsad till det aktuella intervallet och visar insikt om vilka värden som ska undersökas. Det största och minsta värdet har bestämts med hjälp av grafräknare. Elevlösningen ges två begreppspoäng på E-nivå.

Uppgift 20

Elevlösning 1 (1 E_M och 2 E_{PL})

a) De talen visar vad han tjänar på kostymerna och jackorna

b) $V = 300 \cdot 0 + 250 \cdot 45 = 11250$

$V = 300 \cdot 20 + 250 \cdot 30 = 13500$

$V = 300 \cdot 40 + 250 \cdot 0 = 12000$

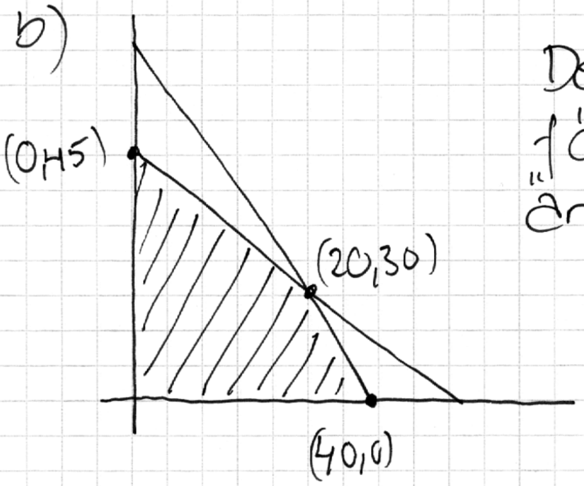
SVAR Maxvinsten är 13500 kr

Kommentar: I a)-uppgiften specificeras inte vinsten mot respektive klädesplagg, vilket gör att förklaringen blir vag. Det framgår inte heller vilka ställningstaganden som lett fram till beräkningarna i b)-uppgiften. På grund av detta utdelas ingen kommunikationspoäng för denna lösning. Elevlösningen ges i a)-uppgiften en modelleringspoäng och i b)-uppgiften två problemlösningspoäng på E-nivå.

Elevlösning 2 (1 E_M, 2 E_{PL} och 1 C_K)

a) 300 = vinst per kostym
250 = vinst per jacka

b)



Det område som gäller för alla olikheterna är det streckade

x	y	V = 300x + 250y
0	45	= 300·0 + 250·45 = 11250
20	30	= 300·20 + 250·30 = 13500
40	0	= 300·40 + 250·0 = 12000

SVAR: Största vinsten är 13500 kr

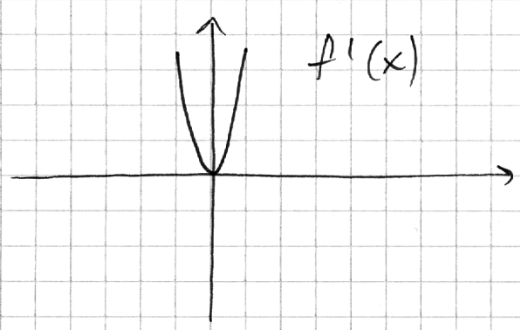
Kommentar: I elevlösningen framgår tydligt att 300 och 250 är den vinst som skräddaren gör på varje kostym respektive jacka. I figuren visas vilket område som motsvaras av olikheterna. Elevlösningen uppfyller kraven för en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 22

Elevlösning 1 (1 C_R)

$f(x) = x^3 + 0{,}03x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 0{,}03$



från grafräknaren

Derivatans graf är alltid positiv utom då x=0 för då är derivatan 0. Teckenväxling + 0 + alltså är det en terasspunkt. Peder har rätt!

Kommentar: I lösningen studeras derivatans graf på grafräknaren. Undersökningsmetoden kan leda till välgrundade slutsatser, men eftersom fönsterinställningen är för grov framgår inte att derivatan saknar nollställe och en felaktig slutsats dras. Lösningen motsvarar därför sammantaget en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (1 C_R)

$f(x) = x^3 + 0{,}03x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 0{,}03$

$3x^2 + 0{,}03 = 0$

$x^2 + 0{,}01 = 0$

$x^2 = -0{,}01$

$x = \pm\sqrt{-0{,}01}$ ERROR

$x = 0{,}1$?

X	0	0,1	0,2
f'(x)	+	0	+
f(x)	↗	Terass	↗

Han har rätt !!!

Kommentar: Undersökningsmetoden (söka derivatans nollställe) är godtagbar eftersom den kan leda till välgrundade slutsatser, men eftersom beräkningen av derivatans nollställe inte är korrekt dras en felaktig slutsats. Sammantaget ges lösningen den första resonemangspoängen på C-nivå.

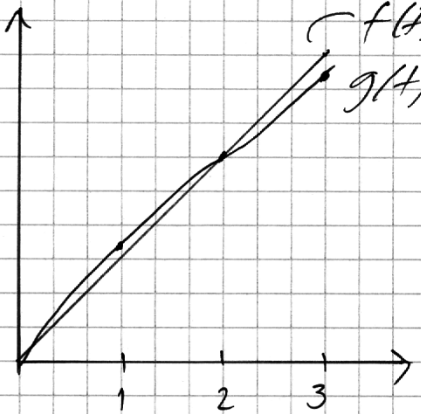
Uppgift 23

Elevlösning 1 (0 poäng)

$f(t)=30t \qquad g(t)=t^3-6t^2+37,8t$

$g'(t)=3t^2-12t+37,8$

Vi skulle kunna lösa detta grafiskt



t	y_1	y_2
1	30	32,8
2	60	59,6
2,5	75	72,6
2,9	87	83,5
3	90	86,4

Svar: Vid 3 timmar det vill säga när fredrik har kommit till mål har han som störst avstånd till Gustav, alltså 3,6 km avstånd.

Kommentar: Elevlösningen visar hur ett korrekt resultat uppnås med hjälp av prövning. Denna prövning styrker dock inte att det största värdet verkligen hittats och är ineffektiv i detta sammanhang. Lösningen uppfyller därmed inte kraven för problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 A_{PL})

$$a(t) = g(t) - f(t)$$

$$a(t) = t^3 - 6t^2 + 37{,}8t - 30t = t^3 - 6t^2 + 7{,}8t$$

$$a'(t) = 3t^2 - 12t + 7{,}8$$

$$\frac{3t^2 - 12t + 7{,}8}{3} = \frac{0}{3}$$

$$t^2 - 4t + 2{,}6 = 0$$

$$t = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 - 2{,}6}$$

$$t = 2 \pm \sqrt{1{,}4}$$

$t = 0{,}817$

$t = 3{,}183$

$0 < t \leq 3$

därav är $t = 3{,}183$ ej definerat

$a(t)$	↗	max	↘	
$a'(t)$	+	0	−	
		0,817		t

$0{,}817h = 49min$

Efter 49min är avståndet störst

$$f(0{,}817) = 3 \cdot 0{,}817 = 24{,}51$$

$$g(0{,}817) = 0{,}817^3 - 6 \cdot 0{,}817^2 + 37{,}8 \cdot 0{,}817 = 27{,}42$$

$$27{,}42 - 24{,}51 = 2{,}9$$

Då ligger Gustav i täten, ca 2,9 km framför Fredrik.

Kommentar: I elevlösningen tecknas en avståndsfunktion och en korrekt bestämning av derivatans nollställen genomförs. Den lösning som ligger utanför definitionsmängden utesluts, men avståndet mellan cyklisterna då $t = 3$ undersöks inte och därmed löses inte problemet i sin helhet. Sammantaget motsvarar denna lösning en problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 3 (3 A_{PL} och 1 A_K poäng)

Avståndet mellan Gustav och Fredrik kan skrivas $A(t) = 30t - (t^3 - 6t^2 + 37{,}8t)$

$A(t) = 30t - t^3 + 6t^2 - 37{,}8t = -t^3 + 6t^2 - 7{,}8t$

$A(t) = -t^3 + 6t^2 - 7{,}8t \quad 0 \leq t \leq 3$

För att få reda på det maximala avståndet deriverar jag funktionen och sätter den lika med noll

$A'(t) = -3t^2 + 12t - 7{,}8$

$0 = -3t^2 + 12t - 7{,}8$

$0 = -3(t^2 - 4t + 2{,}6)$

med pq-formeln $t_1 \approx 3{,}183...$

$t_2 \approx 0{,}8167...$

$\left(t^2 - 4t + 2{,}6 = 0 \quad t = 2 \pm \sqrt{2^2 - 2{,}6} \right)$

t_1 tillhör inte definitionsmängden! $0 \leq t \leq 3$

x	0	0,5	0,8167	1	3
A'(t)		– –	0	+	+
A(t)	0	↘	min –2,91...	↗	3,6

Teckenstudium visar att avståndet är som störst då Fredrik går i mål, dvs. efter 3 timmar. Då är avståndet 3,6 km mellan dem

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt bestämning av det största avståndet, vilket motsvarar tre problemlösningspoäng på A-nivå. Det framgår inte hur derivatans tecken i teckenschemat bestämts, men redovisningen är i övrigt välstrukturerad, lätt att följa och förstå samt visar på korrekt användning av matematisk terminologi. Lösningen uppfyller därmed kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 24

Elevlösning 1 (2 A_{PL} och 1 A_K)

$$S(x+h) = S(x) + h$$

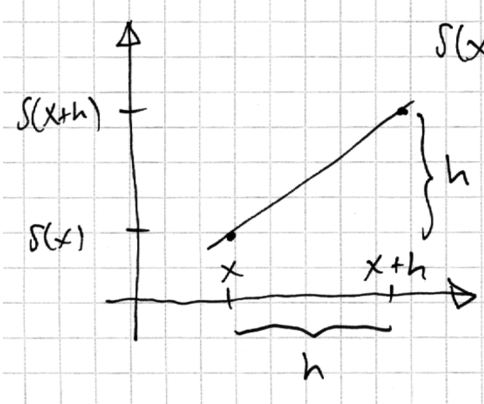
$$S(x+h) - S(x) = h$$

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$S'(4) = 1$$

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt algebraisk lösning som sammantaget ger två problemlösningspoäng och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (2 A_{PL} och 1 A_K)



$S(x+h) = S(x) + h$

$h = S(x+h) - S(x)$

Avståndet i x-led = h

Avståndet i y-led = h

Då är S(x) en linje med k = 1

Då är ju S'(4) också 1

SVAR: S'(4) = 1

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt grafisk lösning som är lätt att följa och förstå. Sammantaget motsvarar lösningen två problemlösningspoäng och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnena.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Kunskapskrav Matematik kurs 3b och 3c

Betyget E – Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena **i bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

Betyget D – Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

Betyget C – Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**. omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

Betyget B – Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

Betyget A – Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja**, tillämpa **och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

Centralt innehåll Matematik kurs 3b

Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:

Algebra

A1 Begreppen polynom och rationella uttryck samt generalisering av aritmetikens lagar till hantering av dessa begrepp.
A2 Algebraiska och grafiska metoder för att lösa polynomekvationer av högre grad.

Samband och förändring

F6 Användning av begreppet geometrisk summa samt linjär optimering i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.
F7 Orientering kring kontinuerlig och diskret funktion samt begreppet gränsvärde.
F8 Egenskaper hos polynomfunktioner av högre grad.
F9 Begreppen sekant, tangent, ändringskvot och derivata för en funktion.
F10 Härledning och användning av deriveringsregler för potens- och exponentialfunktioner samt summor av funktioner.
F11 Introduktion av talet e och dess egenskaper.
F12 Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av derivatans värde för en funktion.
F13 Algebraiska och grafiska metoder för lösning av extremvärdesproblem inklusive teckenstudium och andraderivatan.
F14 Samband mellan en funktions graf och funktionens första- och andraderivata.
F15 Begreppen primitiv funktion och bestämd integral samt sambandet mellan integral och derivata.
F16 Bestämning av enkla integraler i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.

Problemlösning

P1 Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
P3 Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
P4 Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.

Bedömningsformulär

Elev:____________________________ **Klass:**________________ **Provbetyg:** ____________

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del A	M_1												
	M_2												
	M_3												
	M_4												
	M_5												
	M_6												
	M_7												
Del B	1												
	2a												
	2b												
	3												
	4												
	5												
	6a												
	6b												
	6c												
	7												
	8												
	9a												
	9b_1												
	9b_2												
	10a												
	10b												
	11a												
	11b												
Del C	12_1												
	12_2												
	13a_1												
	13a_2												
	13b_1												
	13b_2												
	13b_3												
	13c_1												
	13c_2												
	13c_3												
	14_1												
	14_2												
	15_1												
	15_2												
	15_3												

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del C	16_1												
	16_2												
	16_3												
	16_4												
Del D	17a_1												
	17a_2												
	17b_1												
	17b_2												
	18_1												
	18_2												
	19_1												
	19_2												
	20a												
	20b_1												
	20b_2												
	20b_3												
	21_1												
	21_2												
	22_1												
	22_2												
	23_1												
	23_2												
	23_3												
	23_4												
	24_1												
	24_2												
	24_3												
	Total												
Σ													

	Total	**5**	**8**	**8**	**5**	**5**	**5**	**7**	**6**	**2**	**0**	**7**	**9**
Σ	**67**	**26**				**23**				**18**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation