

<b>Del B</b>	Uppgift 1-10. Endast svar krävs.
<b>Del C</b>	Uppgift 11-16. Fullständiga lösningar krävs.
<b>Provtid</b>	120 minuter för Del B och Del C tillsammans.
<b>Hjälpmedel</b>	Formelblad och linjal.

**Kravgränser** Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 72 poäng varav 26 E-, 25 C- och 21 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 19 poäng

D: 29 poäng varav 9 poäng på minst C-nivå

C: 38 poäng varav 16 poäng på minst C-nivå

B: 48 poäng varav 7 poäng på A-nivå

A: 57 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där "*Endast svar krävs*" behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

**Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.**

Namn: \_\_\_\_\_

Födelsedatum: \_\_\_\_\_

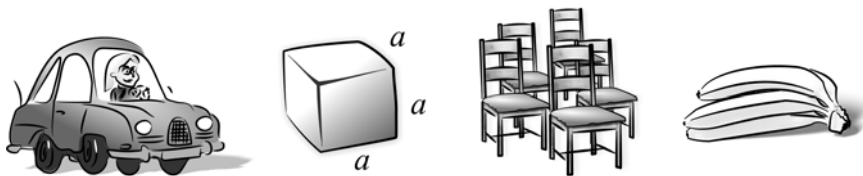
Gymnasieprogram/Komvux: \_\_\_\_\_



**Del B:** Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs. Skriv dina svar direkt i provhäftet.*

1. Vilken är den fjärde termen i den geometriska summan  $2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \dots$ ? \_\_\_\_\_ (1/0/0)
2. För vilket värde på  $x$  är uttrycket  $\frac{3x-21}{6-x}$  inte definierat? \_\_\_\_\_ (1/0/0)
3. Vilket av alternativen A-E visar ett polynom?
- A.  $\frac{4}{x^3} + 4x^3$
- B.  $x^2 + x^{2,5}$
- C.  $\left(2 + \frac{1}{x}\right)^3$
- D.  $4x^3 + 2x^2$
- E.  $\frac{5x}{12x - x^2}$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)
4. Hur många reella lösningar har ekvationen nedan?  
 $(x-1)(x^2-4) = 0$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)
5. Derivera
- a)  $f(x) = 3x^4 + 6x + 10$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)
- b)  $f(x) = e^x + ex$  \_\_\_\_\_ (0/1/0)
- c)  $f(x) = \frac{2}{3x} + \frac{3x}{2}$  \_\_\_\_\_ (0/1/0)

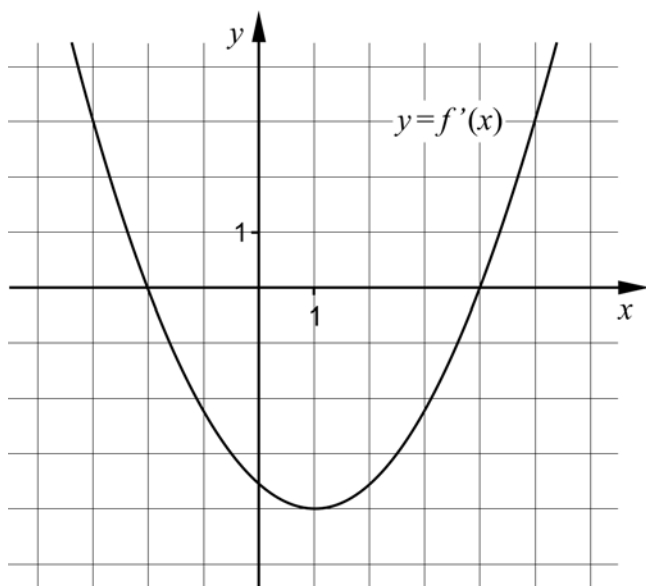
6. Nedan ges några olika situationer som kan beskrivas med en funktion. Vilket av alternativen A-D beskrivs bäst med en diskret funktion?



- A. Bensinförbrukningen hos en bil beror av hur långt bilen körs.  
 B. Volymen av en kub beror av sidans längd.  
 C. Intäkten beror av hur många stolar som tillverkas i företaget.  
 D. Kostnaden för bananer beror av vikten på bananerna.

\_\_\_\_\_ (0/1/0)

7. Figuren nedan visar grafen till derivatan  $f'$  för en tredjegradsfunktion  $f$ .



- a) För vilket värde på  $x$  har grafen till  $f$  en minimipunkt?

\_\_\_\_\_ (0/1/0)

- b) För vilka värden på  $x$  är  $f$  avtagande?

\_\_\_\_\_ (0/2/0)

8. Ange *alla* funktioner som har egenskapen att  $f(x) = f'(x)$  där  $f(x) \neq 0$

\_\_\_\_\_ (0/1/1)

## 9. Bestäm

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 7)$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)

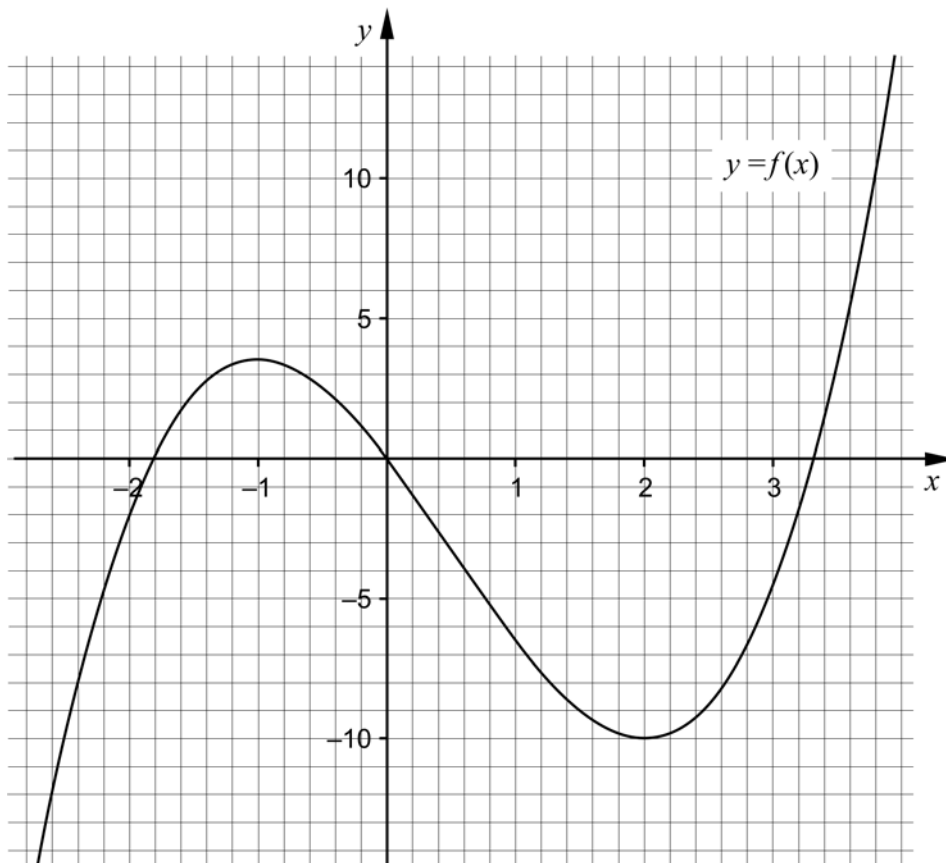
b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{16x}{4x+9}}$  \_\_\_\_\_ (0/0/1)

10. I figuren visas grafen till tredjegradsfunktionen  $f$ . Använd grafen för att besvara följande frågor.

a) Lös ekvationen  $f(x) + 6,5 = 0$  \_\_\_\_\_ (0/0/1)

b) För funktionen  $g$  gäller att  $g(x) = f(x) + k$  där  $k$  är en positiv konstant. För vilka värden på  $k$  har ekvationen  $g(x) = 0$  endast en reell lösning?

\_\_\_\_\_ (0/0/1)



**Del C:** Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

11. Beräkna  $\int_1^2 6x^2 dx$  algebraiskt. (2/0/0)

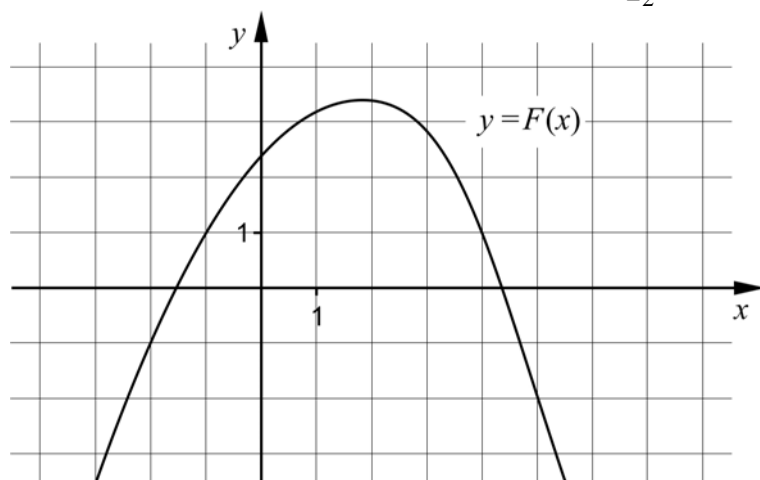
12. För funktionen  $f$  gäller att  $f(x) = x^3 - 3x^2$   
 Bestäm med hjälp av derivata koordinaterna för eventuella  
 maximi-, minimi- och terrasspunkter för funktionens graf.  
 Bestäm också karaktär för respektive punkt, det vill säga om det är en  
 maximi-, minimi- eller terrasspunkt. (3/0/0)

13. För funktionerna  $f$  och  $g$  gäller att  $f(x) = 5x^2 + 3x$  och  $g(x) = x^2 + 8x$   
 a) Bestäm det värde på  $x$  där grafen till  $f$  har lutningen 18 (2/0/0)  
 b) Grafen till  $g$  har en tangent i den punkt där  $x = 6$   
 Bestäm koordinaterna för tangentens skärningspunkt med  $x$ -axeln. (0/3/0)

14. Förenkla så långt som möjligt.  
 a)  $\frac{(x-3)(x+2)}{2x-6}$  (1/0/0)  
 b)  $\frac{x^2 + 8x + 16}{2x^2 - 32}$  (0/2/0)

15.  $F$  är en primitiv funktion till funktionen  $f$ .

I figuren visas grafen till funktionen  $F$ . Bestäm  $\int_{-2}^5 f(x) dx$  (0/0/1)



16. Bestäm derivatan till  $f(x) = \frac{A}{x}$  med hjälp av derivatans definition. (0/2/2)

<b>Del D</b>	Uppgift 17-25. Fullständiga lösningar krävs.
<b>Provtid</b>	120 minuter.
<b>Hjälpmedel</b>	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

**Kravgränser** Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 72 poäng varav 26 E-, 25 C- och 21 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 19 poäng

D: 29 poäng varav 9 poäng på minst C-nivå

C: 38 poäng varav 16 poäng på minst C-nivå

B: 48 poäng varav 7 poäng på A-nivå

A: 57 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där "*Endast svar krävs*" behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

**Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.**

Namn: \_\_\_\_\_

Födelsedatum: \_\_\_\_\_

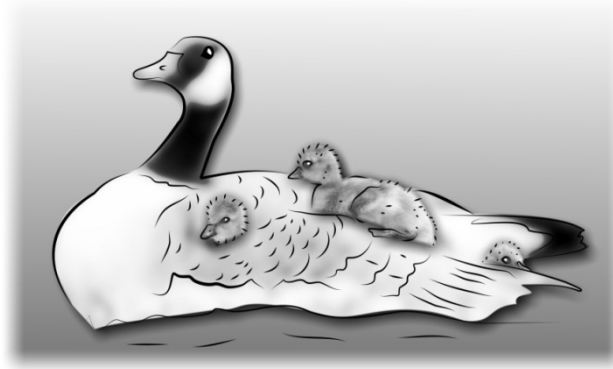
Gymnasieprogram/Komvux: \_\_\_\_\_



**Del D:** Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

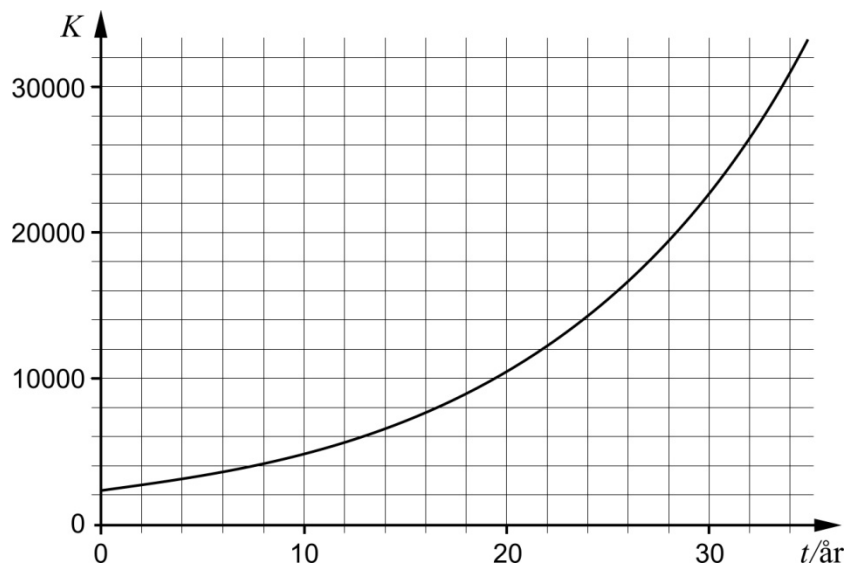
17. Bestäm det värde på  $x$  där derivatan till  $f(x) = x^2 + 5x$  är lika med derivatan till  $g(x) = -5x^2 + 14x$  (2/0/0)

18.



Kanadagåsen infördes till Sverige på 1930-talet. Därefter har populationen ökat. Vid samma tidpunkt varje år görs en inventering av antalet kanadagäss. Populationens tillväxt kan beskrivas med en exponentiell modell.

Diagrammet nedan visar antalet kanadagäss  $K$  som funktion av tiden  $t$  år, där  $t = 0$  motsvarar år 1977.

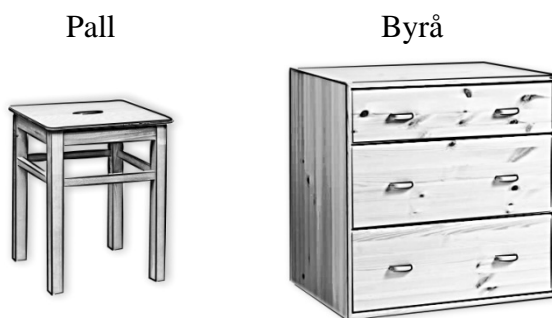


- a) Bestäm ett närmevärde till  $K'(30)$  med hjälp av grafen. (1/0/0)
- b) Ge en tolkning av vad  $K'(20) = 800$  betyder för antalet kanadagäss i detta sammanhang. (0/1/0)

19. Marcel tänker sätta in 2000 kr på ett sparkonto i slutet av varje år. Han tänker göra sin första insättning i slutet av år 2013 och den sista i slutet av år 2020. Marcel räknar med en årlig ränta på 2 %.

Hur mycket pengar kommer han att ha på sitt konto omedelbart efter den sista insättningen? (2/0/0)

20. Sture har ett enmansföretag som köper in färdiga trädetaljer i furu. Han tillverkar enbart två produkter, pallar och byråer. Stures arbetsuppgifter består av att montera och lacka dessa, vilket han inte kan göra samtidigt. Följande data gäller för hans produktion:



	Arbetstimmar (h)		Tillgängliga arbetstimmar per vecka (h)
	Pall	Byrå	
Montering	0,25	0,50	15
Lackning	0,40	1,00	25
Vinst per produkt	150 kr	320 kr	

Antag att Sture tillverkar  $x$  pallar och  $y$  byråer under en vecka.

- a) Sture får en order på 40 pallar och 10 byråer. Hinner han tillverka dessa under en arbetsvecka? (2/0/0)
- b) Bestäm den maximala vinst som Stures företag kan göra under en arbetsvecka. (0/4/0)
21. Är följande påståenden korrekta? Motivera dina svar.
- a)  $F(x) = 3e^x$  är en primitiv funktion till  $f(x) = e^{3x}$  (1/0/0)
- b) Grafen till  $f(x) = x^3 + ax$  har tre olika nollställen om konstanten  $a \leq 0$  (0/2/1)

22. Karolina håller upp en kopp kaffe i ett rum där temperaturen är 20°C. Hon mäter kaffets temperatur direkt och därefter varje minut under de första 5 minuterna. Karolina anpassar sedan en matematisk modell till sina mätvärden:

$$T(t) = 95e^{-0,039t}$$

där  $T$  är kaffets temperatur i °C och  $t$  är tiden i minuter efter att Karolina startade sin mätning av temperaturen.

- a) Bestäm temperaturen hos kaffet då Karolina startade sin mätning. (1/0/0)
- b) Bestäm med hur många procent temperaturen hos kaffet minskar per minut. (0/1/0)
- c) Karolinas modell stämmer väl överens med verkligheten i början. Utvärdera hur väl hennes modell stämmer överens med verkligheten över tid. (0/1/1)

23.



Tartaglia (1500-1557)

Italienaren Tartaglia var en matematiker som levde på 1500-talet. Han anses ha formulerat följande matematiska problem, här återgivet i modern översättning:

*Summan av två positiva tal är 8. Bestäm talen så att produkten av talens differens och talens produkt blir så stor som möjligt.*

Din uppgift är att lösa Tartaglias matematiska problem. (0/0/3)

24. För tredjegradsfunktionen  $f$  gäller att

- $f'(2) = -1$
- $f''(4) = 0$

Bestäm  $f'(6)$

(0/0/3)

25. När Mario föds bestämmer sig hans mormor för att spara pengar åt honom i en burk. Mormor tänker lägga ett belopp som motsvarar kvadraten av Marios ålder multiplicerat med 100, varje gång han fyller år. Marios farbröder Sergio och Riccardo funderar över hur mycket pengar mormor kommer att ha i burken på Marios 6-årsdag.

Sergio säger: *Man får reda på hur mycket pengar som finns i burken genom att*

*beräkna integralen  $\int_0^6 100x^2 dx$*

Riccardo funderar ett tag och svarar: *Nej, den ger ett för litet värde.*

Förklara varför integralen ovan ger ett för litet värde om man använder den för att räkna ut hur mycket pengar det finns i burken på Marios 6-årsdag.

(0/1/3)

### **Till eleven - Information inför det muntliga delprovet**

Du kommer att få en uppgift som du ska lösa skriftligt och sedan ska du presentera din lösning muntligt. Om du behöver får du ta hjälp av dina klasskamrater och din lärare när du löser uppgiften. Din muntliga redovisning börjar med att du presenterar vad uppgiften handlar om och sedan får du beskriva och förklara din lösning. Du ska redovisa alla steg i din lösning. Däremot, om du har gjort samma beräkning flera gånger (till exempel i en värdetabell) så kan det räcka med att du redovisar några av beräkningarna. Din redovisning är tänkt att ta maximalt 5 minuter och ska göras för en mindre grupp klasskamrater och din lärare.

Den uppgift som du får ska i huvudsak lösas för hand, algebraiskt. Det kan hända att du behöver en miniräknare för att göra en del beräkningar men du ska inte hänvisa till grafitande och/eller symbolhanterande funktioner på räknaren (om du har en sådan typ av räknare) när du redovisar din lösning.

Vid bedömningen av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

#### *Hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är*

Din redovisning ska innehålla de delar som behövs för att dina tankar ska gå att följa och förstå. Det du säger bör komma i lämplig ordning och inte innehålla någonting onödigt. Den som lyssnar ska förstå hur beräkningar, beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger ihop med varandra.

#### *Hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning*

Din redovisning bör innehålla både beskrivningar och förklaringar. Man kan enkelt säga att en beskrivning svarar på frågan *hur* och en förklaring svarar på frågan *varför*. Du beskriver något när du till exempel berättar *hur* du har gjort en beräkning. Du förklarar något när du motiverar *varför* du till exempel kunde använda en viss formel.

#### *Hur väl du använder den matematiska terminologin*

När du redovisar bör du använda ett språk som innehåller matematiska termer, uttryckssätt och symboler som är lämpliga utifrån den uppgift du har löst.

Matematiska termer är ord som till exempel ”exponent”, ”funktion” och ”graf”.

Ett exempel på ett matematiskt uttryckssätt är att  $x^2$  utläses ” $x$  upphöjt till 2” eller ” $x$  i kvadrat”.

Några exempel på matematiska symboler är  $\pi$  och  $f(x)$ , vilka utläses ”pi” och ” $f$  av  $x$ ”.

### Uppgift 1. Rätblockets maximala volym

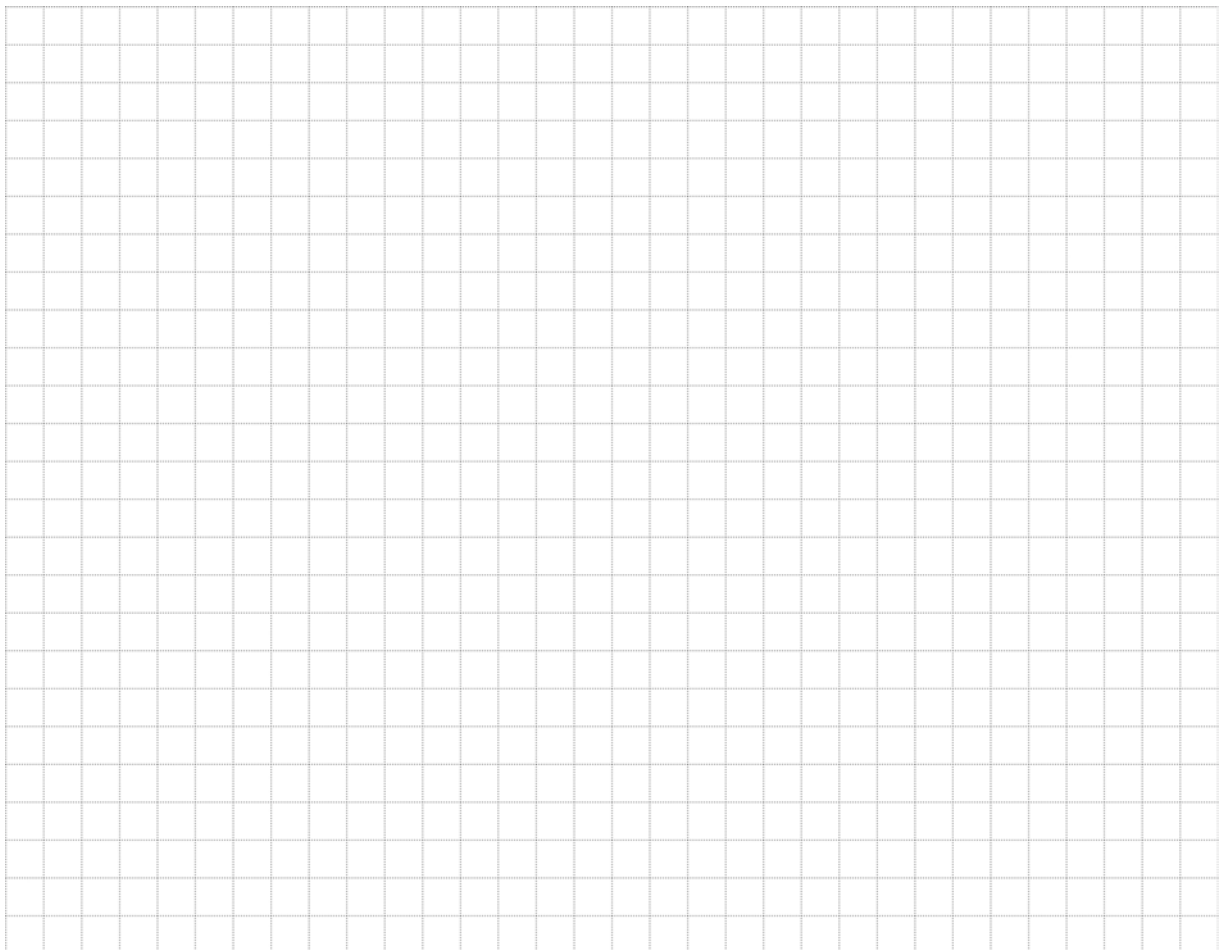
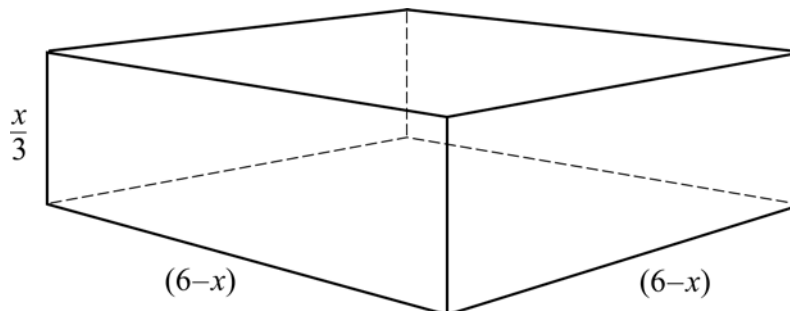
Namn: \_\_\_\_\_

**Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:**

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Figuren nedan visar ett rätblock med sidorna  $\frac{x}{3}$ ,  $(6-x)$  och  $(6-x)$  i.e.

Använd derivata och beräkna rätblockets största möjliga volym.



## Uppgift 2. Derivatans värde

Namn: \_\_\_\_\_

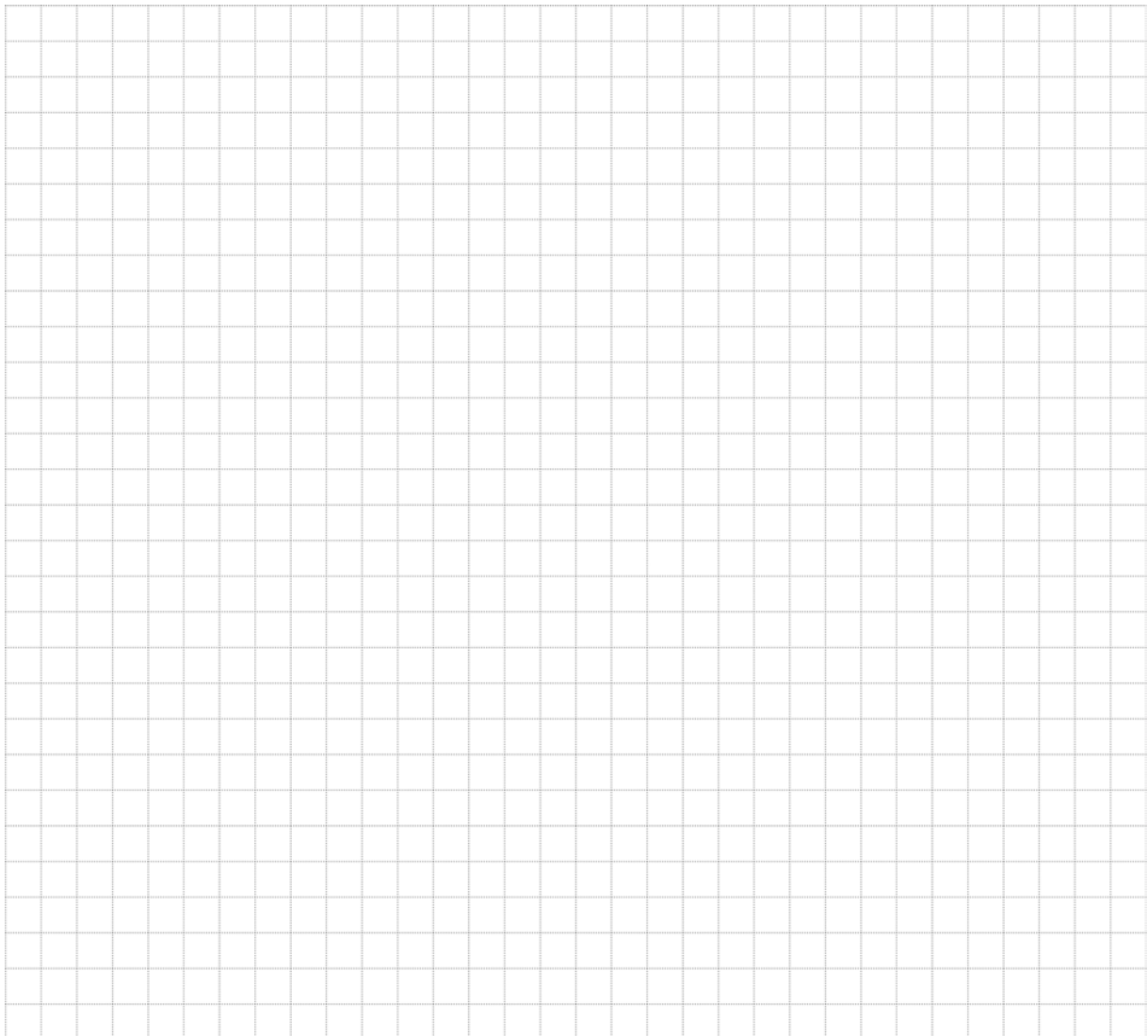
**Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:**

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

För funktionen  $f$  gäller att  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 7$

- Bestäm  $f'(4)$  med hjälp av deriveringsregler.
- Bestäm  $f'(4)$  med hjälp av ändringskvot\*.
- Förklara, gärna med hjälp av en figur, varför du får olika svar i a)- och b)-uppgiften.

\* *Kommentar:* Ändringskvot kallas även för förändringskvot eller differenskvot.



**Uppgift 3. Jordvallen**

Namn: \_\_\_\_\_

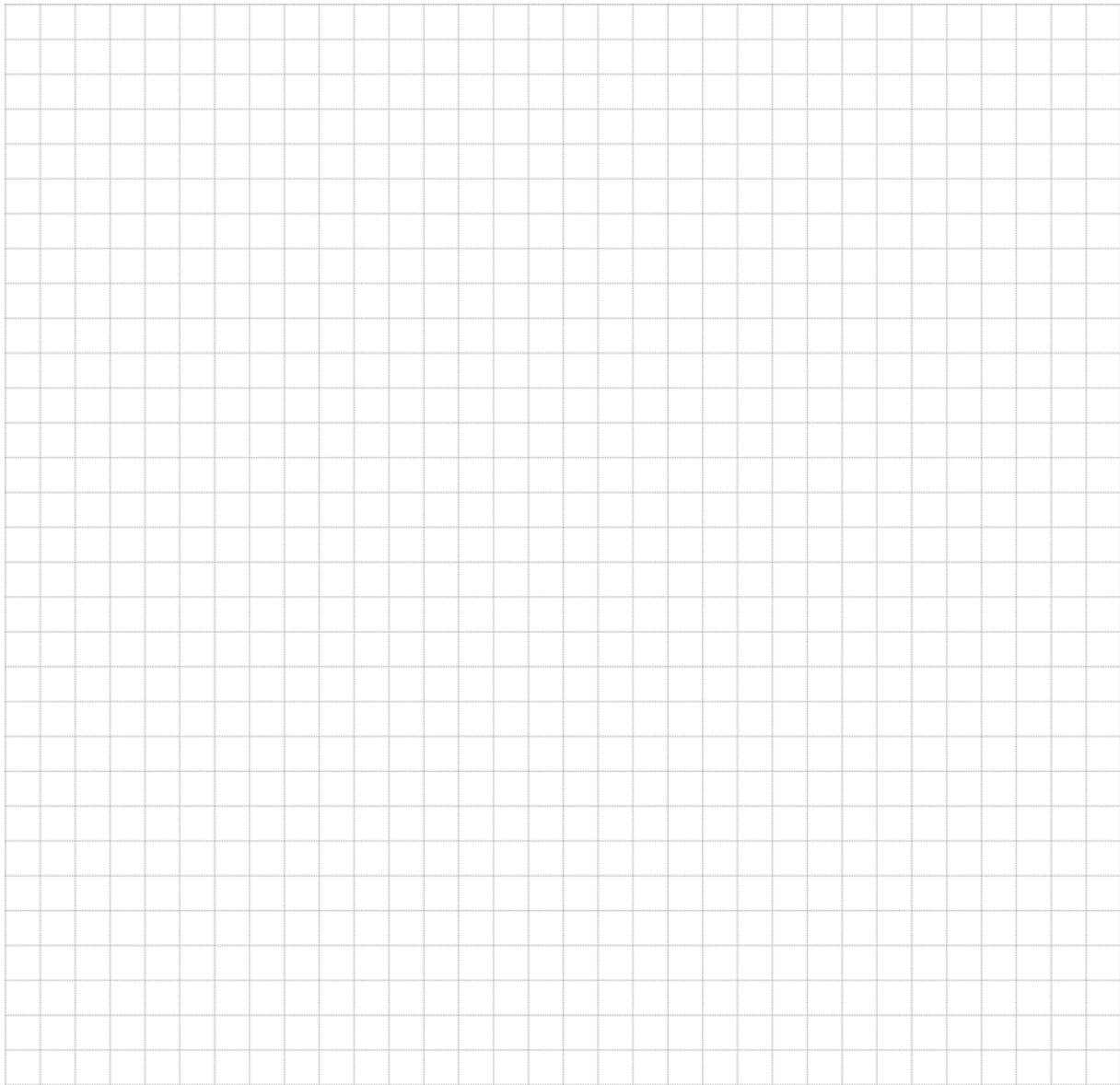
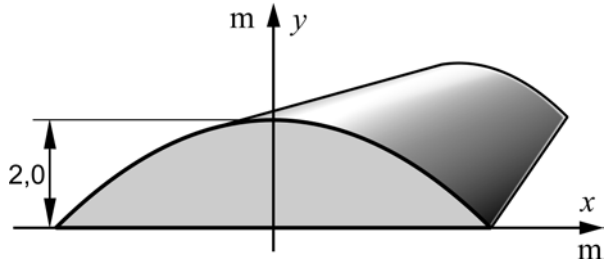
**Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:**

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Intill en motorväg ska man anlägga en 2,0 m hög jordvall som bullerskydd. Jordvallens form kan beskrivas med en andragradskurva

$$y = 2,0 - 0,125x^2$$

Beräkna hur många  $m^3$  jord som kommer att behövas per kilometer jordvall.





#### Uppgift 4. Insättning av pengar

Namn: \_\_\_\_\_

**Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:**

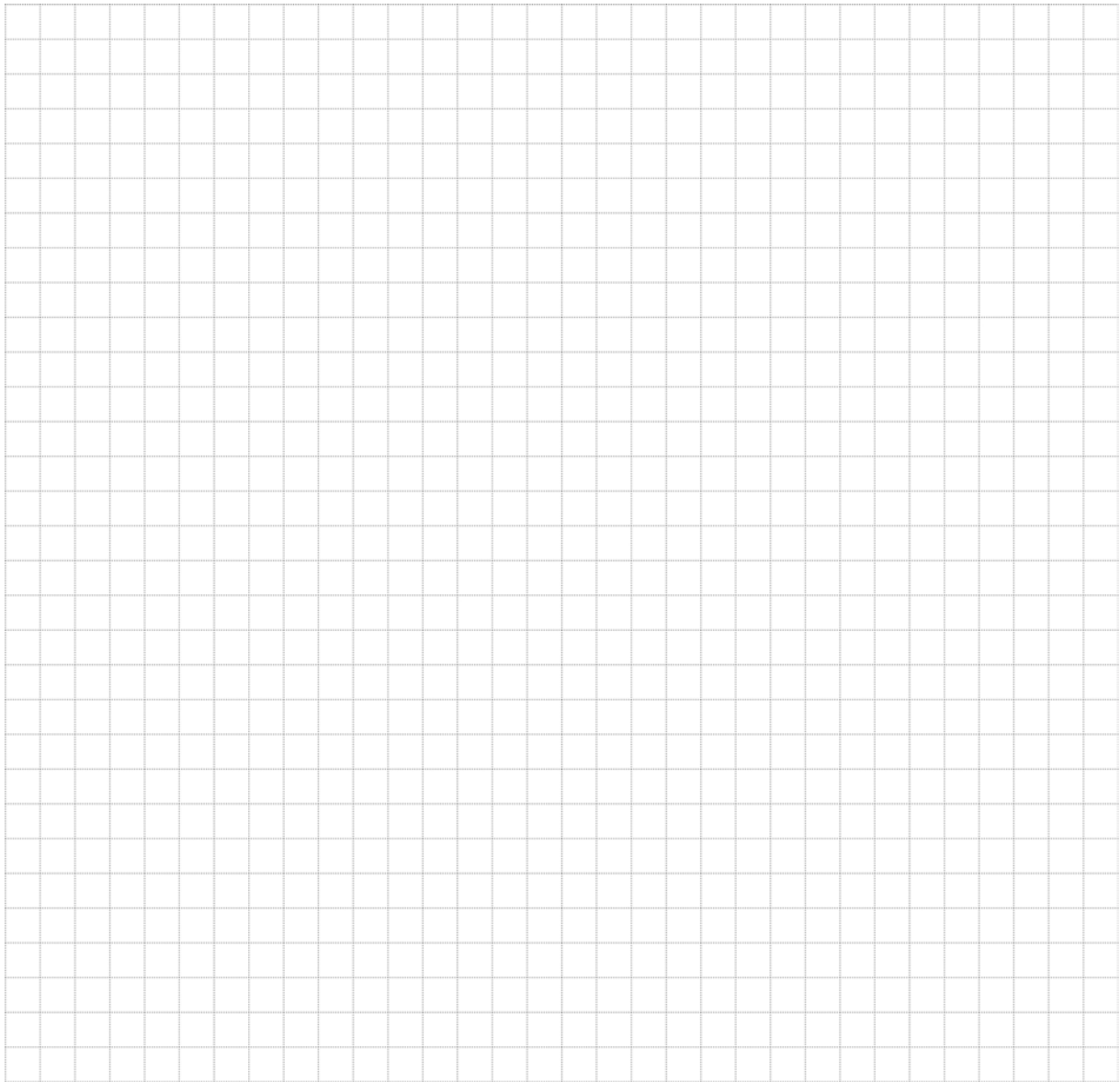
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Andrea och Beata tänker börja spara pengar på var sitt konto där årsräntan är 2 %.

Andrea tänker sätta in en engångssumma på 15000 kr i slutet av år 2012.

Beata tänker sätta in 1000 kr per år, med start i slutet av år 2012.

Hur mycket pengar har Andrea respektive Beata på sina konton omedelbart efter Beatas sista insättning i slutet av år 2026?



**Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga**

<b>Kommunikativ förmåga</b>	<b>E</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>Max</b>
<p><b><i>Fullständighet, relevans och struktur</i></b></p> <p>Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.</p>	<p>Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande.</p> <p>Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig.</p> <p>(1/0/0)</p>		<p>Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår.</p> <p>Redovisningen är välstrukturerad.</p> <p>(1/0/1)</p>	(1/0/1)
<p><b><i>Beskrivningar och förklaringar</i></b></p> <p>Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.</p>	<p>Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar.</p> <p>Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad.</p> <p>(1/0/0)</p>		<p>Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar.</p> <p>(1/0/1)</p>	(1/0/1)
<p><b><i>Matematisk terminologi</i></b></p> <p>Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen.</p> <p>(1/0/0)</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen.</p> <p>(1/1/0)</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen.</p> <p>(1/1/1)</p>	(1/1/1)
<b>Summa</b>				(3/1/3)

## Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning .....	3
Bedömningsanvisningar .....	3
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga .....	4
Provsammanställning - Kunskapskrav .....	5
Provsammanställning – Centralt innehåll .....	6
Kravgränser .....	7
Bedömningsanvisningar .....	8
Del B.....	8
Del C.....	10
Del D.....	11
Bedömda elevlösningar .....	15
Uppgift 12.....	15
Uppgift 13b.....	15
Uppgift 15.....	16
Uppgift 16.....	16
Uppgift 18b.....	16
Uppgift 20b.....	17
Uppgift 21b.....	18
Uppgift 22c.....	19
Uppgift 23.....	20
Uppgift 24.....	22
Uppgift 25.....	23
Ur ämnesplanen för matematik .....	26
Kunskapskrav Matematik kurs 3b och 3c .....	27
Centralt innehåll Matematik kurs 3b.....	28
Bedömningsformulär.....	29
Insamling av provresultat för matematik .....	30
Urvalsinsamlingen .....	30



## Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att  $E_{PL}$  och  $A_R$  ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankgången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

### Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt olika modeller:

---

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 $E_p$
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...)	+1 $E_p$

*Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.*

---

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ...
1 $E_R$	1 $E_R$ och 1 $C_R$	1 $E_R$ och 1 $C_R$ och 1 $A_R$

*Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).*

---

### **Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga**

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå ( $C_K$ ) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan innehålla något ovidkommande eller sakna något steg. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå ( $A_K$ ) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

Förutom den allmänna beskrivningen av kraven kan ibland mer utförliga beskrivningar ges i samband med de bedömda elevlösningar där kommunikationspoäng förekommer.

## Provsammanställning - Kunskapskrav

**Tabell 1** Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3b i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 7b\_1 och 7b\_2 den första respektive andra poängen i uppgift 7b.

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del A	M_1				1								
	M_2												1
	M_3				1								
	M_4												1
	M_5				1								
	M_6								1				
	M_7												1
Del B	1	1											
	2	1											
	3	1											
	4	1											
	5a		1										
	5b						1						
	5c						1						
	6					1							
	7a					1							
	7b_1					1							
	7b_2								1				
	8_1					1							
	8_2									1			
	9a	1											
	9b											1	
	10a											1	
10b								1					
Del C	11_1		1										
	11_2		1										
	12_1		1										
	12_2		1										
	12_3		1										
	13a_1			1									
	13a_2			1									
	13b_1							1					
	13b_2							1					
	13b_3								1				
	14a		1										
	14b_1						1						
	14b_2						1						
	15											1	
	16_1					1							
	16_2						1						
	16_3									1			
	16_4												1

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del D	17_1			1									
	17_2			1									
	18a	1											
	18b					1							
	19_1			1									
	19_2			1									
	20a_1					1							
	20a_2					1							
	20b_1								1				
	20b_2								1				
	20b_3								1				
	20b_4									1			
	21a					1							
	21b_1									1			
	21b_2									1			
	21b_3												1
	22a			1									
	22b								1				
	22c_1								1				
	22c_2											1	
	23_1										1		
	23_2											1	
	23_3											1	
	24_1												1
	24_2												1
24_3												1	
25_1									1				
25_2												1	
25_3												1	
25_4												1	
<b>Total</b>		<b>6</b>	<b>7</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>7</b>	<b>4</b>	<b>-</b>	<b>6</b>	<b>11</b>
<b>Σ</b>	<b>72</b>	<b>26</b>				<b>25</b>				<b>21</b>			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation





## **Kravgränser**

Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 72 poäng varav 26 E-, 25 C- och 21 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 19 poäng

D: 29 poäng varav 9 poäng på minst C-nivå

C: 38 poäng varav 16 poäng på minst C-nivå

B: 48 poäng varav 7 poäng på A-nivå

A: 57 poäng varav 12 poäng på A-nivå

## Bedömningsanvisningar



*Exempel* på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

### Del B

- |  |                   |
|--|-------------------|
| <b>1.</b>  | <b>Max 1/0/0</b>  |
| Korrekt svar ( $2 \cdot 3^3$ )   | +1 E <sub>B</sub> |
| <br>   |                   |
| <b>2.</b>  | <b>Max 1/0/0</b>  |
| Korrekt svar (6)   | +1 E <sub>B</sub> |
| <br>   |                   |
| <b>3.</b>  | <b>Max 1/0/0</b>  |
| Korrekt svar (D: $4x^3 + 2x^2$ )   | +1 E <sub>B</sub> |
| <br>   |                   |
| <b>4.</b>  | <b>Max 1/0/0</b>  |
| Korrekt svar (3)   | +1 E <sub>B</sub> |
| <br>   |                   |
| <b>5.</b>  | <b>Max 1/2/0</b>  |
| a) Korrekt svar ( $f'(x) = 12x^3 + 6$ )  | +1 E <sub>P</sub> |
| b) Korrekt svar ( $f'(x) = e^x + e$ )  | +1 C <sub>P</sub> |
| c) Korrekt svar $\left( f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} + \frac{3}{2} \right)$        | +1 C <sub>P</sub> |
| <i>Kommentar:</i> Svar utan ” $f'(x)$ ” anses vara korrekt.                      |                   |
| <br>   |                   |
| <b>6.</b>  | <b>Max 0/1/0</b>  |
| Korrekt svar (C: Intäkten beror av hur många stolar som tillverkas i företaget.) | +1 C <sub>B</sub> |

- 7.** **Max 0/3/0**
- a) Korrekt svar ( $x = 4$ ) +1 C<sub>B</sub>
- b) Korrekt intervall, t.ex. ” $x$  är större än eller lika med 2 och  $x$  är mindre än eller lika med 4” +1 C<sub>B</sub>
- där det korrekta intervallet kommuniceras på en nivå som motsvarar kunskapskraven för C, dvs. med korrekt använda olikhetstecken ( $-2 \leq x \leq 4$ ) +1 C<sub>K</sub>
- Kommentar:* Vissa läromedel inkluderar inte derivatans nollställen i intervallet. Vid bedömning bör detta beaktas.
- 
- 8.** **Max 0/1/1**
- Anger en korrekt funktion, t.ex.  $y = e^x$  +1 C<sub>B</sub>
- med korrekt införd konstant ( $y = ae^x$ ) +1 A<sub>B</sub>
- 
- 9.** **Max 1/0/1**
- a) Korrekt svar (8) +1 E<sub>B</sub>
- b) Korrekt svar (2) +1 A<sub>PL</sub>
- 
- 10.** **Max 0/0/2**
- a) Godtagbart svar ( $x_1 \approx -2,3$ ;  $x_2 \approx 1$  och  $x_3 \approx 2,8$ ) +1 A<sub>PL</sub>
- b) Godtagbart svar ( $k > 10$ ) +1 A<sub>B</sub>

## Del C

- 11.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion,  $2x^3$  +1 E<sub>P</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (14) +1 E<sub>P</sub>
- 12.** **Max 3/0/0**
- Korrekt bestämning av derivatans nollställen,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$  +1 E<sub>P</sub>  
 med korrekt bestämning av extrempunkternas koordinater, (0, 0) och (2, -4) +1 E<sub>P</sub>  
 Godtagbar verifiering av extrempunkternas karaktär  
 (maximipunkt (0,0) och minimipunkt (2, -4)) +1 E<sub>P</sub>
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
- 13.** **Max 2/3/0**
- a) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen  $10x + 3 = 18$  +1 E<sub>PL</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $x = 1,5$ ) +1 E<sub>PL</sub>
- b) Korrekt bestämning av tangentens ekvation,  $y = 20x - 36$  +1 C<sub>PL</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ((1,8; 0)) +1 C<sub>PL</sub>
- Lösningen (deluppgift b) kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, beteckningar såsom  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f'(6)$ , termer såsom koordinater, tangent och  $x$ - axel samt hänvisning till tangentens ekvation etc. +1 C<sub>K</sub>
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
- 14.** **Max 1/2/0**
- a) Godtagbar lösning med korrekt svar  $\left(\frac{x+2}{2}\right)$  +1 E<sub>P</sub>
- b) Godtagbar ansats, t.ex. skriver om uttrycket till  $\frac{x^2 + 8x + 16}{2(x-4)(x+4)}$  +1 C<sub>P</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar  $\left(\frac{x+4}{2(x-4)}\right)$  +1 C<sub>P</sub>

15.

Max 0/0/1

Godtagbar lösning, där insikt visas om att problemet löses genom direkt avläsning i graf, med korrekt svar ( $-1$ )

+1 A<sub>PL</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



16.

Max 0/2/2

Korrekt tecknad ändringskvot,  $\frac{\frac{A}{x+h} - \frac{A}{x}}{h}$

+1 C<sub>B</sub>

med korrekt förenkling av ändringskvoten, t.ex.  $\frac{-Ah}{hx(x+h)}$

+1 C<sub>P</sub>

med korrekt bestämning av derivatan,  $f'(x) = \frac{-A}{x^2}$

+1 A<sub>B</sub>

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, beteckningar såsom  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f(x+h)$ , korrekt användning av symbolen  $\lim_{h \rightarrow 0}$ , bråkstreck och hänvisning till derivatans definition etc.

+1 A<sub>K</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



### Del D

17.

Max 2/0/0

Godtagbar ansats, t.ex. ritar graferna till derivatorna i ett och samma koordinatsystem

+1 E<sub>PL</sub>

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $x = 0,75$ )

+1 E<sub>PL</sub>

18.

Max 1/1/0

a) Godtagbar lösning med godtagbart svar ( $K'(30) \approx 1700$ )

+1 E<sub>B</sub>

b) Godtagbar tolkning (t.ex. "Antalet kanadagäss ökar med 800 per år då  $t = 20$  år") +1 C<sub>B</sub>

Källa: Jägareförbundet (2009). Kanadagås, publ. 2009-09-21, (hämtat 2010-10-07), <http://www.jagareforbundet.se/Viltet/ViltVetande/Artpresentationer/Kanadagas/>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



19. Max 2/0/0

- Godtagbar ansats, t.ex. använder formeln för geometrisk summa +1 E<sub>M</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (17166 kr) +1 E<sub>M</sub>

20. Max 2/4/0

- a) Godtagbar inledning till resonemang, t.ex. undersöker hur många arbetstimmar som krävs för att montera 40 pallar och 10 byråer +1 E<sub>R</sub>  
 med godtagbart slutfört resonemang med korrekt svar (Nej) +1 E<sub>R</sub>

- b) Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer det system av olikheter som motsvarar kraven +1 C<sub>PL</sub>  

$$\begin{cases} 0,25x + 0,50y \leq 15 \\ 0,40x + y \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

med godtagbar fortsättning, bestämmer vinstfunktionens värde för någon av de aktuella punkterna +1 C<sub>PL</sub>

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (9100 kr) +1 C<sub>PL</sub>

Lösningen (deluppgift b) kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, parenteser, tydlig figur, olikhetstecken och termer såsom rät linje, koordinatsystem, olikheter, skärningspunkt etc. +1 C<sub>K</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



21. Max 1/2/1

- a) Godtagbart svar som visar insikt om att villkoret  $F'(x) = f(x)$  inte är uppfyllt, (t.ex. "Nej, för om man deriverar  $F$  får man inte  $f$ .") +1 E<sub>R</sub>

b)

E	C	A
	Troliggör för minst två specialfall att påståendet stämmer om $a < 0$ eller visar att påståendet inte stämmer om $a = 0$ .	Troliggör för mer än två specialfall att påståendet stämmer om $a < 0$ och visar att påståendet inte stämmer om $a = 0$ .
	1 C <sub>R</sub>	2 C <sub>R</sub>
		Visar att påståendet stämmer för <i>alla</i> $a < 0$ och visar att påståendet inte stämmer om $a = 0$ .
		2 C <sub>R</sub> och 1 A <sub>R</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



**Forts. uppgift 21**

*Kommentar (införd 2013-02-08):* Bedömningsanvisningen ovan utgår från att eleven utreder fallen  $a = 0$  och  $a < 0$  separat och sedan drar separata slutsatser om dessa. Om någon sammanfattning av slutsatserna görs så är den av typen ”Det stämmer ibland” eller ”Det stämmer inte alltid.”

Om eleven istället visar att påståendet ”Grafen till  $f(x) = x^3 + ax$  har tre olika nollställen om konstanten  $a \leq 0$ ” är falskt genom att t.ex. peka på att fallet  $a = 0$  strider mot påståendet, så ges två resonemangspoäng på C- och en resonemangspoäng på A-nivå.

**22.****Max 1/2/1**

- a) Godtagbar lösning med korrekt svar ( $95^\circ$ ) +1 E<sub>M</sub>
- b) Godtagbar lösning med godtagbart svar (3,8 %) +1 C<sub>M</sub>

c)

<b>E</b>	<b>C</b>	<b>A</b>
	Utvärderar Karolinas modell med ett enkelt omdöme.  Omdömet visar insikt om att Karolinas modell inte tar hänsyn till omgivningens temperatur.	Utvärderar Karolinas modell med ett nyanserat omdöme.  Omdömet visar insikt om att Karolinas modell inte tar hänsyn till omgivningens temperatur <i>och</i> hur denna brist påverkar modellens egenskaper.
	1 C <sub>M</sub>	1 C <sub>M</sub> och 1 A <sub>M</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*

**23.****Max 0/0/3**

- Korrekt tecknad funktion för produkten i två variabler, t.ex.  $D = xy(y - x)$  +1 A<sub>B</sub>
- där en variabel eliminerats korrekt, t.ex.  $D = x(8 - x)(8 - 2x)$  +1 A<sub>PL</sub>
- med i övrigt godtagbar lösning, inklusive godtagbar verifiering av maximum, med godtagbart svar (6,31 och 1,69) +1 A<sub>PL</sub>

*Kommentar:* Observera att om eleven härlett funktionen  $D = 2x^3 - 24x^2 + 64x$  erhålls maximum då  $x \approx 1,7$  och om eleven härlett funktionen  $D = -2x^3 + 24x^2 - 64x$  erhålls maximum då  $x \approx 6,3$

*Källa:* Tichomirov, V.M. (1990). *Stories about Maxima and Minima*. Providence, R.I.: American Mathematical Society. Sid.37

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



24.

Max 0/0/3

Godtagbar ansats, t.ex. förklarar att derivatan är en funktion av andra graden som har en extrempunkt då  $x = 4$  +1 A<sub>R</sub>

med godtagbart slutfört resonemang med korrekt svar (På grund av symmetri hos andragsgradsfunktionen måste  $f'(6) = f'(2) = -1$ ) +1 A<sub>R</sub>

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, beteckningar såsom  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f'(6) = -1$  och termer såsom symmetri, andragsgradsfunktion, tredjegradsfunktion, graf, derivata och en tydlig figur med införda beteckningar etc. +1 A<sub>K</sub>

*Kommentar:* Även en algebraisk ansats som utgår från de givna villkoren och en generell tredjegradsfunktion (t.ex.  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ) och som leder till sambanden  $24a + 2b = 0$  och  $12a + 4b + c = -1$  ges den första poängen.

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



25.

Max 0/1/3

E	C	A	
	Anger någon relevant egenskap hos minst en av modellerna (summan eller integralen) som förklaring till skillnaden, t.ex. antyder att skillnaden har att göra med att mormor bara sätter in pengar ibland <i>eller</i> att hon inte sätter in pengar hela tiden.	Kopplar skillnaden till att de två modellerna (summan och integralen) baseras på en diskret respektive en kontinuerlig funktion, men ger ingen godtagbar förklaring till varför summan är större än integralen <i>eller</i> diskuterar/visar att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av ett antal staplar.	Diskuterar/visar att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av ett antal staplar <i>och</i> förklarar varför summan blir större än integralen genom att t.ex. hänvisa till en figur som visar hela tidsperioden där det framgår att arean under kurvan (integralen) är mindre än den sammanlagda arean av de sex staplarna (summan).
	1 C <sub>R</sub>	1 C <sub>R</sub> och 1 A <sub>R</sub>	1 C <sub>R</sub> och 2 A <sub>R</sub>

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara integralbeteckningar, likhetstecken och termer såsom funktionsvärde, diskret och kontinuerlig funktion, area, summa och en tydlig figur över hela tidsperioden etc. +1 A<sub>K</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*





## Bedömda elevlösningar

### Uppgift 12

#### Elevlösning 1 (2 E<sub>P</sub>)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \quad f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\frac{3x^2 - 6x}{3} = \frac{0}{3}$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x = +\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2} = 1 \pm 1$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(0) = 0 - 6 = -6, \text{ dvs } x=0 \text{ Maxpunkt}$$

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6, \text{ dvs } x=2 \text{ Minpunkt}$$

*Kommentar:* Elevlösningen innehåller ingen beräkning av y-koordinaterna. Däremot verifieras extrempunkternas karaktär. Sammantaget ges lösningen den första och den tredje procedurpoängen på E-nivå.

### Uppgift 13b

#### Elevlösning 1 (2 C<sub>PL</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

$$g(x) = x^2 + 8x$$

$$g(6) = 6^2 + 8 \cdot 6 = 36 + 48 = 84$$

$$g'(x) = 2x + 8$$

$$g'(6) = 2 \cdot 6 + 8 = 20$$

$$y = 20x - 36$$

$$y = kx + m$$

$$20x = 36$$

$$84 = 20 \cdot 6 + m$$

$$x = 36/20 = 9/5$$

$$m = -36$$

$$\text{SVAR: } \left(\frac{9}{5}, 0\right)$$

*Kommentar:* Elevlösningen är någorlunda strukturerad med korrekt hantering av symbolerna  $g(x)$ ,  $g'(x)$  och  $g(6)$ . Det framgår dock inte med tydlighet att  $k = g'(6)$  och att ekvationen  $y = 0$  löses för att beräkna skärningen med  $x$ -axeln. Elevlösningens kvalitet motsvarar därmed nått och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

## Uppgift 15

Elevlösning 1 (1 A<sub>PL</sub>)

$$F(5) - F(-2) = -2 - (-1) = -1 \quad \underline{\text{SVAR: } -1}$$

*Kommentar:* I elevlösningen visas insikt om att problemet löses genom avläsning i graf, även om det inte framgår varför avläsning i grafen skett. Elevlösningen motsvarar en problemlösningsspoäng på A-nivå.

## Uppgift 16

Elevlösning 1 (1 C<sub>B</sub>, 1 C<sub>P</sub>, 1 A<sub>B</sub> och 1 A<sub>K</sub>)

derivatans definition

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{A}{x+h} - \frac{A}{x}}{h} = \frac{Ax - A(x+h)}{hx(x+h)}$$

$$= \frac{Ax - Ax - Ah}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-Ah}{hx^2 + h^2x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-A}{x^2 + hx} = \frac{-A}{x^2} //$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar en korrekt härledning av derivatan, vilket motsvarar en begrepps- och en procedurpoäng på C-nivå samt en begrepps-poäng på A-nivå. Under förenklingen av ändringskvoten tappas "lim" bort på första och andra raden, men vid själva gränsvärdesbestämningen på sista raden är skrivsättet korrekt, vilket är väsentligt i denna uppgift. Lösningen uppfyller därmed nått och jämnt kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

## Uppgift 18b

Elevlösning 1 (1 C<sub>B</sub>)

Kanadagässen ökar med en hastighet av 800 gäss/år efter 20 år.

*Kommentar:* Tolkningen att det är en hastighet i antal kanadagäss/år som efterfrågas framgår av lösningen. Frasen "efter 20 år" är otydlig eftersom det skulle kunna tolkas som att hastigheten är konstant då  $t > 20$ . Lösningen motsvarar därmed nått och jämnt en begrepps-poäng på C-nivå.

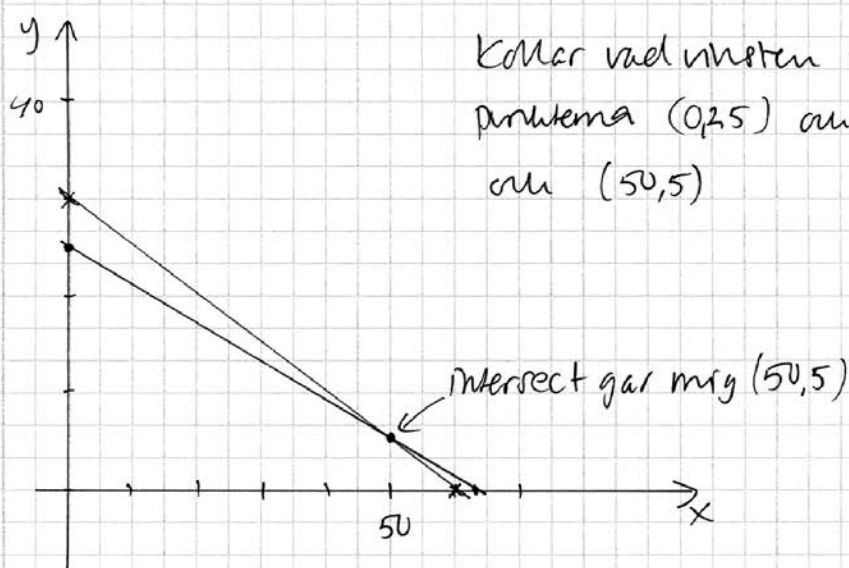
## Uppgift 20b

## Elevlösning 1 (3 CPL och 1 CK)

$$\begin{array}{l}
 b) \quad x = \text{pallar} \quad y = \text{byråer} \\
 0,25x + 0,50y = 15 \\
 0,40x + 1,00y = 25 \\
 x > 0 \\
 y > 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} \text{ekvationer}$$

$$y = 30 - 0,5x$$

$$y = 25 - 0,40x$$



x	y	Vinst
0	25	$0 \cdot 150 + 25 \cdot 320 = 8000 \text{ kr}$
60	0	$60 \cdot 150 + 0 \cdot 320 = 9000 \text{ kr}$
50	5	$50 \cdot 150 + 5 \cdot 320 = 9150 \text{ kr}$ <u>Maxvinsten</u>

*Kommentar:* Elevlösningen visar hur grafräknare används på ett godtagbart sätt för att lösa uppgiften, vilket motsvarar tre problemlösningspoäng på C-nivå. När det gäller den skriftliga kommunikativa förmågan används inte olikhetstecken i de inledande sambanden och olikheterna kallas för ekvationer. Dessutom framgår inte med tydlighet i figuren vilket område som anses vara aktuellt. Redovisningen av vinstberäkningarna och hur grafräknaren använts för att bestämma skärningspunkten är någorlunda tydlig. Elevlösningen bedöms nätt och jämnt motsvara en kommunikationspoäng på C-nivå.

## Uppgift 21b

## Elevlösning 1 (1 CR)

$$f(x) = x^3 + ax \quad a \leq 0$$

Testar  $a = -5$

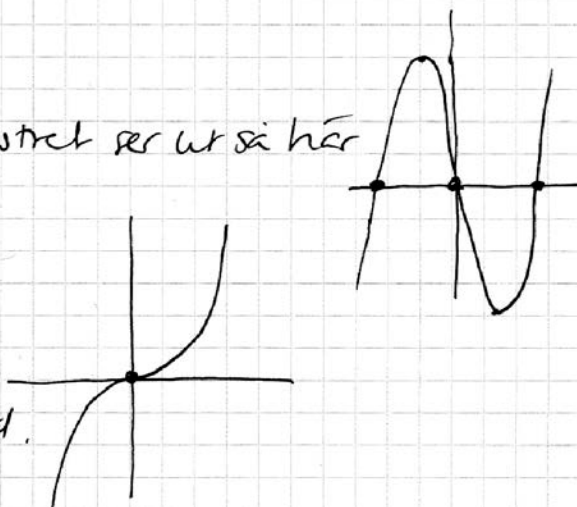
$f(x) = x^3 - 5x$  på graf-fönstret ser ut så här

Den har tre nollställen

Testar  $a = 0$

$f(x) = x^3$  har ett nollställe

SVAR: Det stämmer inte alltid.



*Kommentar:* I elevlösningen undersöks antalet nollställen då  $a = -5$  och då  $a = 0$  med grafräknare. Om elevlösningen innehållit en undersökning av ytterligare ett specialfall, t.ex.  $a = -10$ , skulle lösningens kvalitet ha motsvarat två resonemangspoäng på C-nivå. Lösningen ges nu en resonemangspoäng på C-nivå.

## Elevlösning 2 (2 CR och 1 AR)

$$f(x) = x^3 + ax$$

Nollställen då  $f(x) = 0$

$$a \leq 0$$

$$\boxed{a = 0}$$

$$x^3 = 0$$

$$x = 0$$

Ett nollställe

$$\boxed{a < 0}$$

$$x^3 + ax = 0$$

$$x(x^2 + a) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad || \quad x^2 + a = 0$$

$$\uparrow \quad x^2 = -a$$

$$\text{ett} \quad x = \pm \sqrt{-a}$$

nollställe Blir 2 nollställen

om  $a < 0$

Om  $a = 0$  fås ett  
och om  $a < 0$  fås tre nollställen. Det är  
sant om  $a < 0$ .

*Kommentar:* Elevlösningen uppvisar en korrekt, generell undersökning. Lösningen ges samtliga resonemangspoäng.

## Uppgift 22c

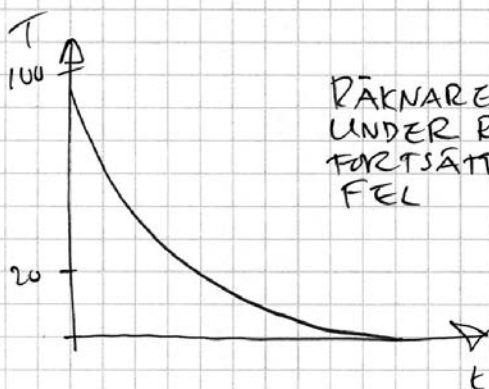
Elevlösning 1 (1 C<sub>M</sub>)

$$c) T(t) = 95e^{-0,039t}$$



Det märks inte i modellen  
att det är 20° i rummet

*Kommentar:* I elevlösningen framgår att modellen inte tar hänsyn till rumstemperaturen, men inte på vilket sätt detta påverkar modellens egenskaper. Elevlösningen ges därmed en modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (1 C<sub>M</sub> och 1 A<sub>M</sub>)

RÄKNAREN VISAR ATT GRAFEN GÅR  
UNDER RUMSTEMPERATUREN OCH  
FORTSÄTTER ATT MINSKA. DET ÄR  
FEL

Elevlösning 3 (1 C<sub>M</sub> och 1 A<sub>M</sub>)

Modellen blir fel för grafen går under  
20°-nivån och närmar sig noll. Kaffet  
kan ju aldrig bli kallare än rummet.

Elevlösning 4 (1 C<sub>M</sub> och 1 A<sub>M</sub>)

$$T(60) = 95 \cdot e^{-0,039 \cdot 60} \approx 9,15$$

$$T(120) = 95 \cdot e^{-0,039 \cdot 120} \approx 0,88$$

$$T(200) = 95 \cdot e^{-0,039 \cdot 200} = 0,04$$

Temperaturen borde närma sig  
20°c vilket den inte gör

*Kommentar:* I elevlösning 2, 3 och 4 framgår att modellen inte tar hänsyn till rumstemperaturen och även på vilket sätt detta påverkar modellen ("grafén går under rumstemperaturen och fortsätter att minska", "grafén går under 20°-nivån och närmar sig noll" respektive "Temperaturen borde närma sig 20° vilket den inte gör"). Elevlösningarna ges två modelleringspoäng, en på C-nivå och en på A-nivå.

## Uppgift 23

## Elevlösning 1 (1 AB och 2 APL)

$$x + y = 8 \quad y = 8 - x$$

$$\text{Taleus differens } x - (8 - x)$$

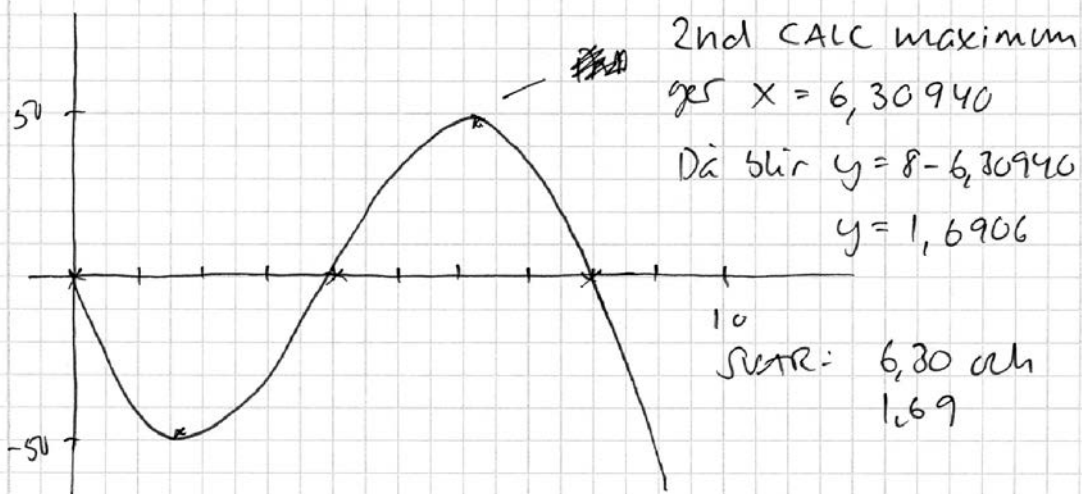
$$\text{Taleus produkt } x(8 - x)$$

$$\text{Deras gemensamma produkt } (2x - 8)(8x - x^2)$$

$$y = -2x^3 + 16x^2 - 64x + 8x^2$$

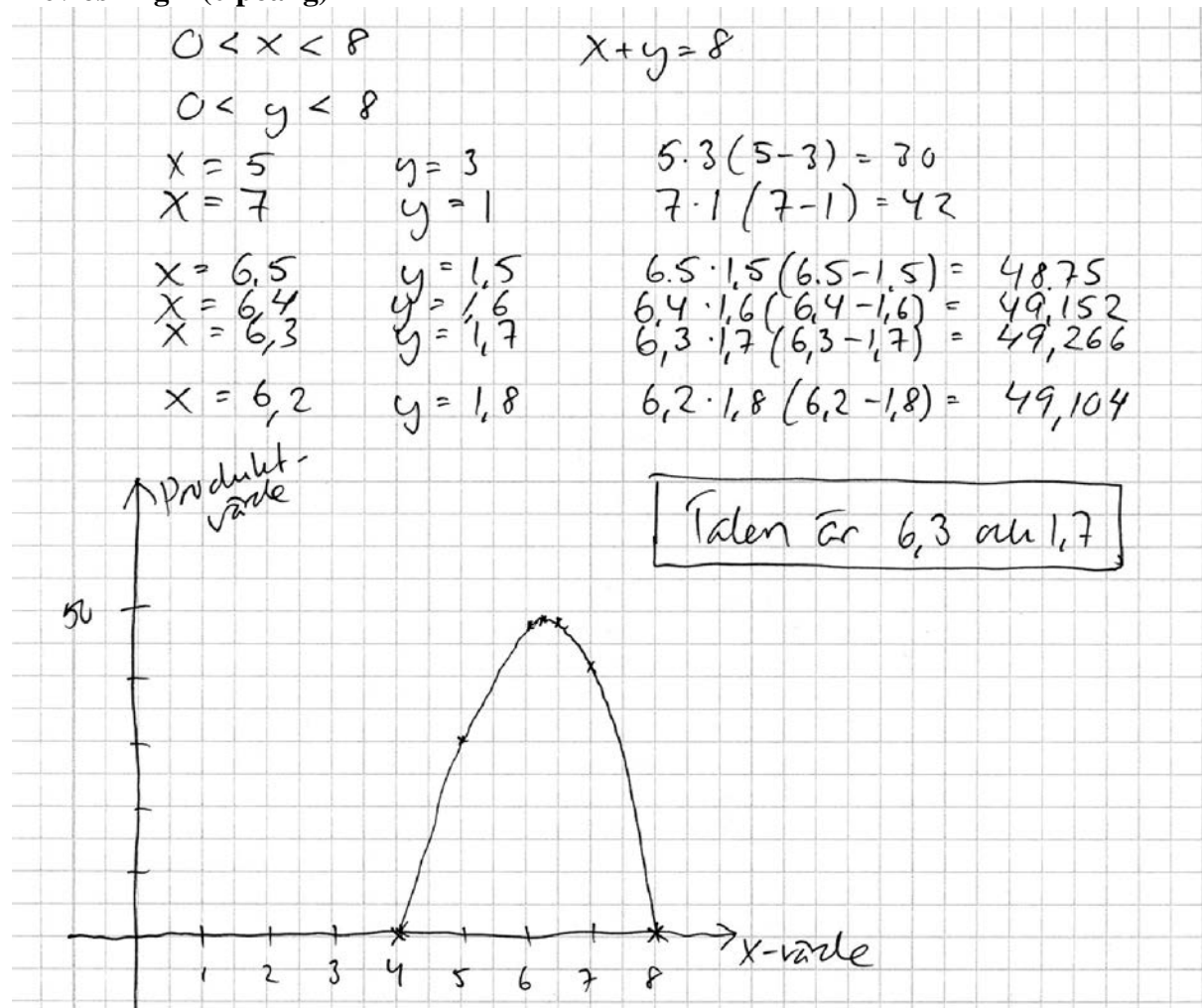
$$y = -2x^3 + 24x^2 - 64x$$

Ritar på grafräknaren



*Kommentar:* Elevlösningen visar en korrekt härledning av ett uttryck för produkten. Lösningen visar även hur grafräknaren används på ett godtagbart sätt för bestämning och verifiering av maximum. Sammantaget motsvarar lösningen en begreppsöing och två problemlösningsöing på A-nivå.

## Elevlösning 2 (0 poäng)



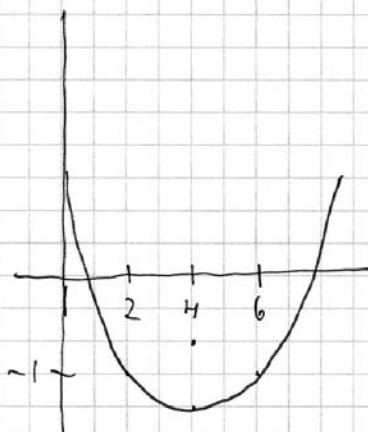
*Kommentar:* Elevlösningen visar hur ett korrekt resultat uppnås med hjälp av prövning. Prövningen styrker inte att maximum verkligen hittats och är ineffektiv i detta sammanhang. En uppgift av detta slag ska, på A-nivå, kunna lösas med mer effektiva metoder som bygger på användning av symbolisk algebra (i detta fall ett funktionsuttryck). Sammantaget ges lösningen inga problemlösningspoäng på A-nivå.



## Uppgift 24

Elevlösning 1 (2 A<sub>R</sub>)

$f'(x)$  måste vara en andragradslinje och  
 $f''(x)$  måste vara en rät linje



$$f'(6) = f'(2)$$

eftersom symmetrilinjen  
går i  $x=4$

$f'(6)$  är alltså lika med  
-1

$$\text{SVAR: } f'(6) = -1$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar ett godtagbart resonemang som leder till ett korrekt svar. Att  $f''(4) = 0$  betyder att derivatafunktionen har en extrempunkt då  $x = 4$  förklaras inte och inte heller kopplingen mellan extrempunkten och symmetrilinjen. Att andraderivatan är en rät linje är inte relevant. På grund av dessa otydligheter uppfyller inte lösningen kravet för kommunikationspoäng på A-nivå. Sammantaget ger lösningen två resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (2 A<sub>R</sub> och 1 A<sub>K</sub>)

$f''$  är 0 i punkten  $x=4$ . Detta är ett maximum eller minimum till andragradsfunktionen  $f'$ . Andragradsfunktioner är symmetriska med symmetrilinje där extrempunkten finns. Därför är  $f'(2)$  lika med  $f'(6)$ , dvs -1.

*Kommentar:* I elevlösningen förklaras både vad  $f''(4) = 0$  betyder och att extrempunkten ligger på symmetrilinjen. Redovisningen skulle ha varit ännu enklare att följa och förstå om den innehållit en skiss med derivatafunktionen, symmetrilinjen och punkterna  $(2, -1)$  och  $(6, -1)$  markerade. Sammantaget motsvarar detta två resonemangspoäng, men nätt och jämnt en kommunikationspoäng på A-nivå.

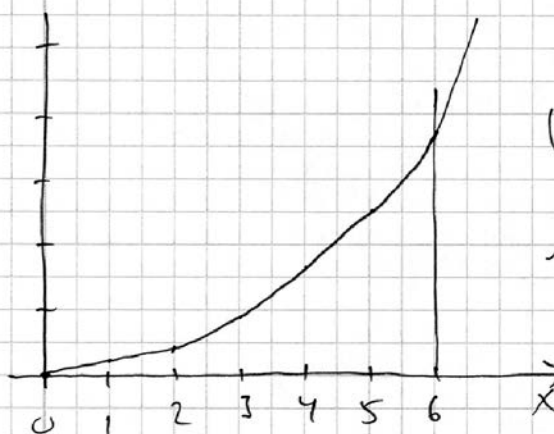


## Uppgift 25

## Elevlösning 1 (0 poäng)

$$\int_0^6 100x^2 dx = \left[ \frac{100x^3}{3} \right]_0^6 = \frac{100 \cdot 6^3}{3} - 0 = 7200$$

Mormor lägger  $100 \cdot 0^2 + 100 \cdot 1^2 + 100 \cdot 2^2 + 100 \cdot 3^2 + 100 \cdot 4^2 + 100 \cdot 6^2 \neq 100 \cdot 5^2 = 9100$



Integrater ger ett för litet värde eftersom funktionen inte visar hur mycket Mario har i burken. Den visar bara x-ålder hur mycket

hans mormor lägger till. Och om funktioner inte visar det vi vill ha, så är det inte nödvändigt att integralen gör det heller.

*Kommentar:* Elevlösningen visar korrekta beräkningar men ingen relevant egenskap som kan kopplas till skillnaden anges. Sammantaget ger denna lösning 0 poäng.

## Elevlösning 2 (1 CR)

Eftersom man bara får in pengar en gång per år stämmer det inte.

*Kommentar:* Elevlösningen antyder att skillnaden kan ha att göra med att mormors summa är en diskret funktion, vilket nätt och jämnt motsvarar en resonemangspoäng på C-nivå.

## Elevlösning 3 (1 CR och 1 AR)

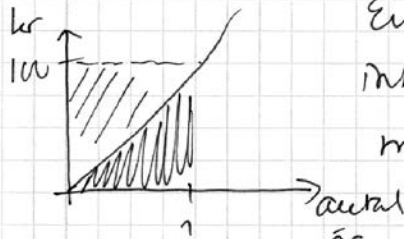
Om man använder integralen för att bestämma hur mycket pengar som finns i burken efter 6 år får man fel värde eftersom  $y = 100x^2$  är en kontinuerlig funktion dvs man förutsätter att mormor sätter in pengar hela tiden medan hon i själva verket bara sätter in pengar en gång om året.

*Kommentar:* I elevlösningen kopplas skillnaden till att det rör sig om en kontinuerlig och en diskret funktion. Dock ges ingen förklaring till varför summan är större än integralen. Sammantaget motsvarar detta två resonemangspoäng, en på C- och en på A-nivå.

## Elevlösning 4 (1 CR och 1 AR)

Integralen är debara som arean under grafen då man inte har någon area under x-axeln som i det här fallet. Då Mario är ett år skulle det ha funnits  $\int_0^1 100x^2 dx = \left[ \frac{100x^3}{3} \right]_0^1 = 33 \text{ kr}$

Men på Marios födelsedag lägger hans mamma i 100 kr.






Enligt diagrammet syns det att integralen bara blir 33 kr efter ett år, men att där finns 100 kr i burken.

Eftersom arean övertar upp till 100-strecket visar faktiskt antal pengar i burken. På samma sätt måste man hela tiden lägga till en viss area som finns övertar grafen för att få fram hur mycket som finns i burken vilket gör att integralen får ett för litet värde.

*Kommentar:* Elevlösningen visar medvetenhet om att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av ett antal staplar. Resonemanget om integral- och stapelarea rör bara det första året och det är därför oklart varför integralen verkligen är mindre än summan över hela tidsperioden. Sammantaget ger lösningen två resonemangspoäng, en på C- och en på A-nivå.

## Elevlösning 5 (1 CR och 2 AR)



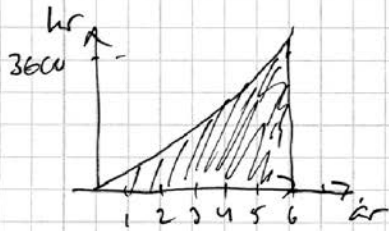
 Det integralen beräknar  
 +  Det Mario egentligen får.

Alltså blir integralen mindre

*Kommentar:* Lösningen innehåller en tydlig figur med 6 staplar som visar att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av ett antal staplar. Det framgår av lösningen att integralen har mindre värde än stapelsumman. Lösningen saknar dock förklaringar och är därmed, trots den tydliga figuren, kommunikationsmässigt knapphändig. Kommunikationspoäng på A-nivå erhålls därmed inte.

## Elevlösning 6 (1 CR, 2 AR och 1 AK)

$\int_0^6 100x^2 dx$  är arean under grafen för funktionen  $100x^2$

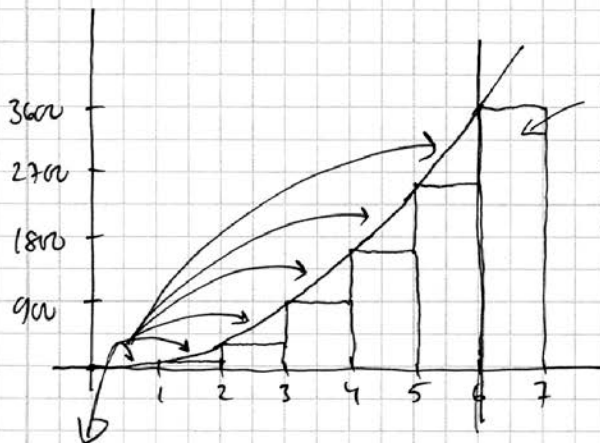


$$\int_0^6 100x^2 dx = \left[ \frac{100}{3} x^3 \right]_0^6 = \frac{100}{3} \cdot 6^3 - \frac{100}{3} \cdot 0^3 = 7200 \text{ hr}$$

Det mormor egentligen sagt in är

$$100 \cdot 0^2 + 100 \cdot 1^2 + 100 \cdot 2^2 + 100 \cdot 3^2 + 100 \cdot 4^2 + 100 \cdot 5^2 + 100 \cdot 6^2 = 9100 \text{ hr}$$

Detta kan illustreras



Dessa puggar får han på sin 6 års dag och därför har han dem också

Och det är därför

$$\int_0^6 100x^2 dx \text{ inte stämmer}$$

för den räknar bara fram till 6 år

Man ser att sista stapeln har större area än de små "trianglarna" under kurvan

*Kommentar:* Elevlösningen är lätt att följa och förstå och visar med en tillräckligt tydlig figur att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av sex staplar. Det framgår av figuren och förklaringarna att integralen har mindre värde än stapelsumman. Sammantaget anses elevlösningen uppfylla kraven för resonemangs- och kommunikationspoäng på A-nivå.

## Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

### Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnen.

### Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

## Kunskapskrav Matematik kurs 3b och 3c

**Betyget E** Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen i **bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

**Betyget D** Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

**Betyget C** Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade** matematiska resonemang och värdera med **nyanserade** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

**Betyget B** Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

**Betyget A** Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja, tillämpa och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

## Centralt innehåll Matematik kurs 3b

*Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:*

### Algebra

- A1** Begreppen polynom och rationella uttryck samt generalisering av aritmetikens lagar till hantering av dessa begrepp.
- A2** Algebraiska och grafiska metoder för att lösa polynomekvationer av högre grad.

### Samband och förändring

- F6** Användning av begreppet geometrisk summa samt linjär optimering i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.
- F7** Orientering kring kontinuerlig och diskret funktion samt begreppet gränsvärde.
- F8** Egenskaper hos polynomfunktioner av högre grad.
- F9** Begreppen sekant, tangent, ändringskvot och derivata för en funktion.
- F10** Härledning och användning av deriveringsregler för potens- och exponentialfunktioner samt summor av funktioner.
- F11** Introduktion av talet  $e$  och dess egenskaper.
- F12** Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av derivatans värde för en funktion.
- F13** Algebraiska och grafiska metoder för lösning av extremvärdesproblem inklusive teckenstudium och andraderivatan.
- F14** Samband mellan en funktions graf och funktionens första- och andraderivata.
- F15** Begreppen primitiv funktion och bestämd integral samt sambandet mellan integral och derivata.
- F16** Bestämning av enkla integraler i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.

### Problemlösning

- P1** Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
- P3** Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
- P4** Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.

# Bedömningsformulär

Elev: \_\_\_\_\_ Klass: \_\_\_\_\_ Provbetyg: \_\_\_\_\_

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå												
		E				C				A				
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	
Del A	M_1													
	M_2													
	M_3													
	M_4													
	M_5													
	M_6													
	M_7													
Del B	1													
	2													
	3													
	4													
	5a													
	5b													
	5c													
	6													
	7a													
	7b_1													
	7b_2													
	8_1													
	8_2													
	9a													
	9b													
	10a													
	10b													
	Del C	11_1												
		11_2												
		12_1												
12_2														
12_3														
13a_1														
13a_2														
13b_1														
13b_2														
13b_3														
14a														
14b_1														
14b_2														
15														
16_1														
16_2														
16_3														
16_4														

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del D	17_1												
	17_2												
	18a												
	18b												
	19_1												
	19_2												
	20a_1												
	20a_2												
	20b_1												
	20b_2												
	20b_3												
	20b_4												
	21a												
	21b_1												
	21b_2												
	21b_3												
	22a												
	22b												
	22c_1												
	22c_2												
	23_1												
	23_2												
	23_3												
	24_1												
	24_2												
	24_3												
	25_1												
	25_2												
	25_3												
	25_4												
<b>Total</b>													
<b>Σ</b>													

<b>Total</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>7</b>	<b>4</b>	<b>-</b>	<b>6</b>	<b>11</b>	
<b>Σ</b>	<b>72</b>	<b>26</b>				<b>25</b>				<b>21</b>			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation