Part B	Problems 1-10 which only require answers.
Part C	Problems 11-16 which require complete solutions.
Test time	120 minutes for Part B and Part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 72 points of which 26 E-, 25 C- and 21 A-points.

Level requirements for test grades
E: 19 points
D: 29 points of which 9 points on at least C-level
C: 38 points of which 16 points on at least C-level
B: 48 points of which 7 points on A-level
A: 57 points of which 12 points on A-level

The number of points you can have for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge level(s) (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled *"Only answers required"* you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thoughts and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational program on all the sheets you hand in.

Name: ____

Date of birth: ____

Educational program: _____________________________________

Part B: Digital resources are not allowed. *Only answer is required.* Write your answers in the test booklet.

1. What is the fourth term of the geometric progression
$2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+...$? ______________________ (1/0/0)

2. For what value of x is the expression $\dfrac{3x-21}{6-x}$ *not* defined?
______________________ (1/0/0)

3. Which of the alternatives A-E shows a polynomial?

A. $\dfrac{4}{x^3}+4x^3$

B. $x^2+x^{2.5}$

C. $\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^3$

D. $4x^3+2x^2$

E. $\dfrac{5x}{12x-x^2}$ ______________________ (1/0/0)

4. How many real solutions are there to the equation below?
$(x-1)(x^2-4)=0$ ______________________ (1/0/0)

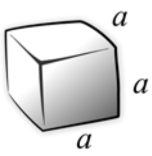
5. Differentiate

a) $f(x)=3x^4+6x+10$ ______________________ (1/0/0)

b) $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}x$ ______________________ (0/1/0)

c) $f(x)=\dfrac{2}{3x}+\dfrac{3x}{2}$ ______________________ (0/1/0)

6. Below are some different situations that can be described by a function.
Which of the alternatives A-D is best described by a discrete function?


A. The petrol consumption of a car depends on how far the car is driven.

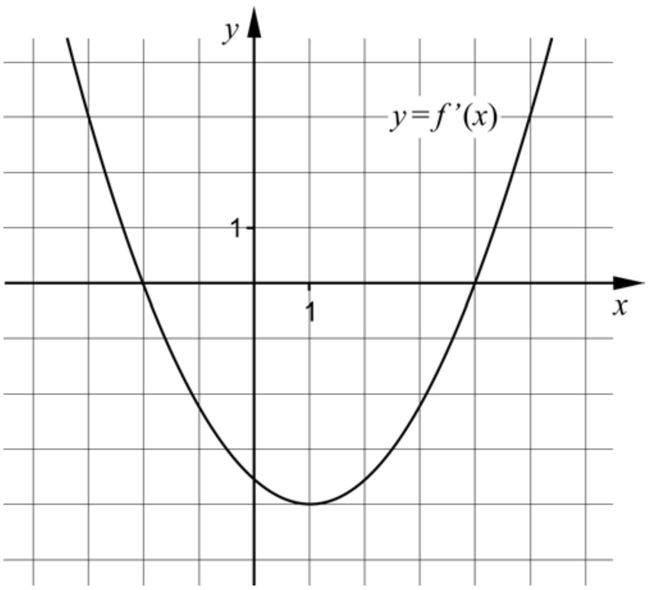
B. The volume of a cube depends on the length of its side.

C. The income depends on how many chairs that are produced in the company.

D. The cost of bananas depends on the weight of the bananas.

________________________ (0/1/0)

7. The figure below shows the graph of the derivative f' of a cubic function f.



a) For what value of x does the graph of f have a minimum point?

________________________ (0/1/0)

b) For what values of x is f decreasing? ________________________ (0/2/0)

8. Write *all* functions with the characteristic that $f(x) = f'(x)$ where $f(x) \neq 0$

________________________ (0/1/1)

9. Determine

a) $\lim_{x \to 0} (e^x + 7)$ ______________________ (1/0/0)

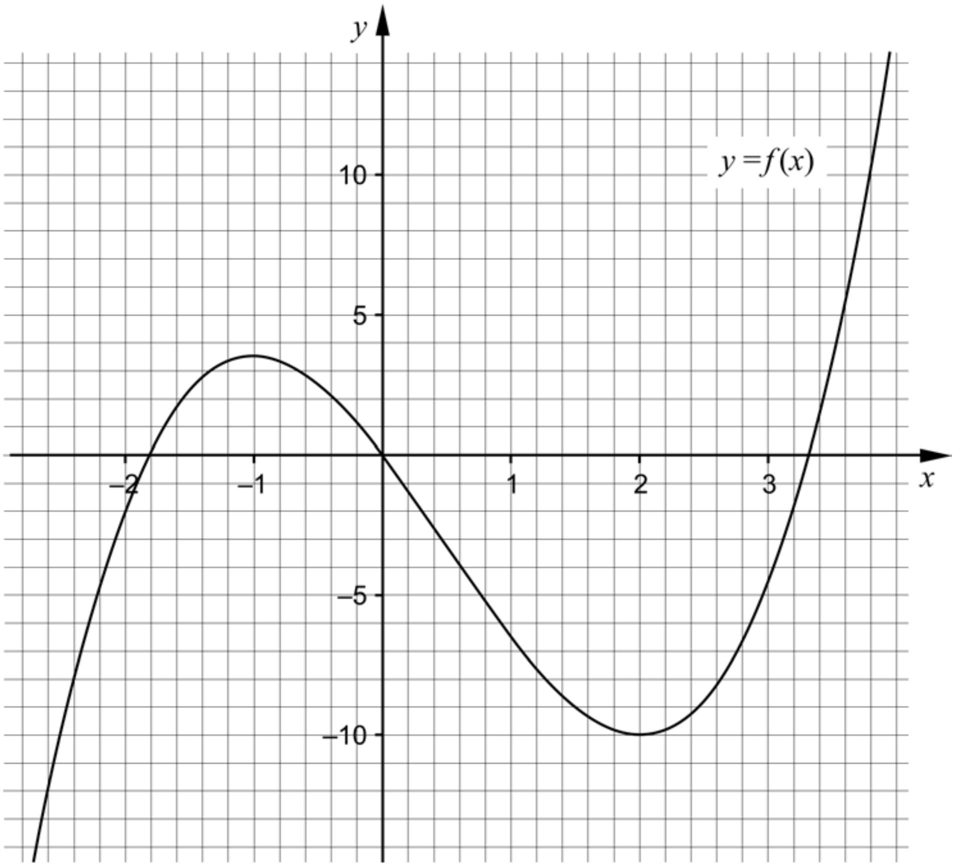
b) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{16x}{4x+9}}$ ______________________ (0/0/1)

10. The figure shows the graph of the cubic function f. Use the graph to answer the following questions.

a) Solve the equation $f(x) + 6.5 = 0$ ______________________ (0/0/1)

b) It holds for the function g that $g(x) = f(x) + k$ where k is a positive constant. For what values of k does the equation $g(x) = 0$ have only one real solution?

______________________ (0/0/1)



Part C: Digital resources are not allowed. Write your solutions on separate sheets of paper.

11. Calculate $\int_1^2 6x^2\,\mathrm{d}x$ algebraically. (2/0/0)

12. It holds for the function f that $f(x) = x^3 - 3x^2$
Use the derivative to determine the coordinates of the possible maximum-, minimum- and saddle points to the graph of the function.

Also determine the character of each point, that is whether it is a maximum-, minimum- or saddle point. (3/0/0)

13. For the functions f and g it holds that $f(x) = 5x^2 + 3x$ and $g(x) = x^2 + 8x$

a) Determine for what value of x it holds that the graph of f has a gradient of 18 (2/0/0)

b) The graph of g has a tangent at the point where $x = 6$
Determine the coordinates for the tangent's intersection with the x-axis. (0/3/0)

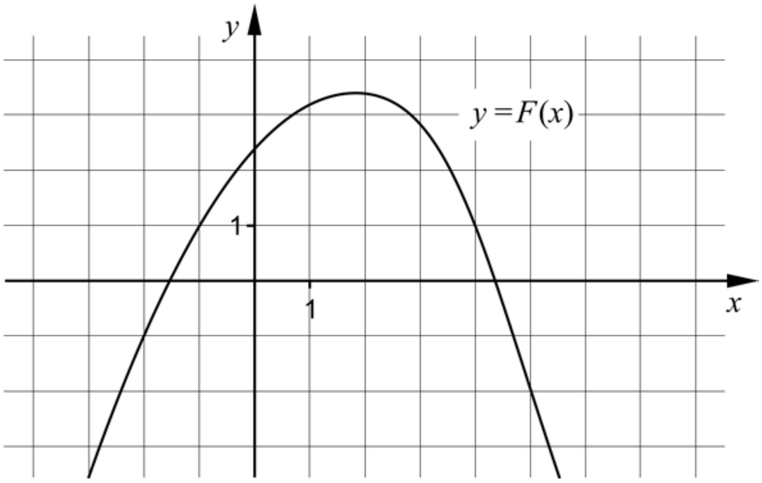
14. Simplify as far as possible.

a) $\dfrac{(x-3)(x+2)}{2x-6}$ (1/0/0)

b) $\dfrac{x^2+8x+16}{2x^2-32}$ (0/2/0)

15. F is the antiderivative of the function f.

The figure shows the graph of the function F. Determine $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$ (0/0/1)



16. Use the definition of the derivative to determine the derivative of $f(x) = \dfrac{A}{x}$ (0/2/2)

Part D	Problems 17-25 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital resources, formula sheet and ruler.

Level requirements

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 72 points of which 26 E-, 25 C- and 21 A-points.

Level requirements for test grades
E: 19 points
D: 29 points of which 9 points on at least C-level
C: 38 points of which 16 points on at least C-level
B: 48 points of which 7 points on A-level
A: 57 points of which 12 points on A-level

The number of points you can have for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge level(s) (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled *"Only answers required"* you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thoughts and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

Write your name, date of birth and educational program on all the sheets you hand in.

Name: ______________________________

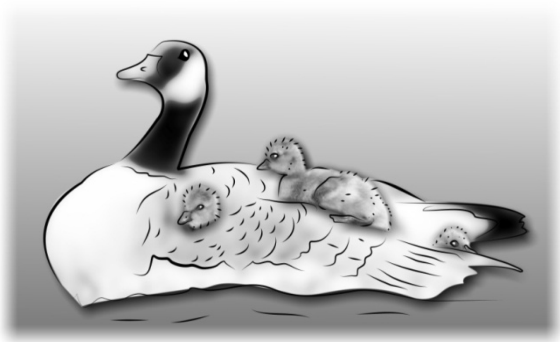
Date of birth: ______________________________

Educational program: ______________________________

Part D: Digital resources are allowed. Write your solutions on separate sheets of paper.

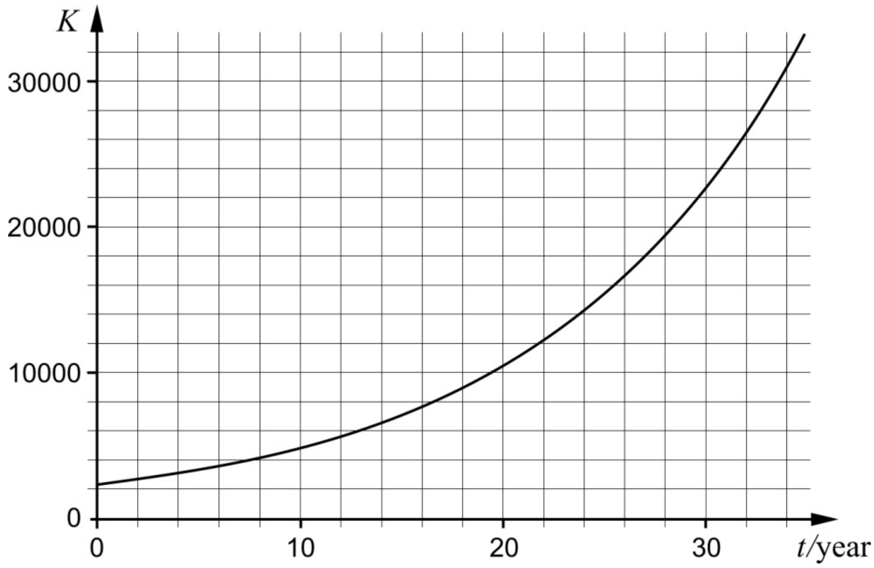
17. Determine for what value of x the derivative of $f(x) = x^2 + 5x$ is equal to the derivative of $g(x) = -5x^2 + 14x$ (2/0/0)

18.



The Canada Goose was introduced into Sweden in the 1930s. The population has increased ever since. Every year, at the same time, there is a survey of the number of Canada Geese. The growth of the population can be described by an exponential model.

The diagram below shows the number of Canada Geese K as a function of time t years, where $t = 0$ corresponds to the year 1977.



a) Use the graph and determine an approximate value of $K'(30)$ (1/0/0)

b) Interpret what $K'(20) = 800$ means to the number of Canada Geese in this context. (0/1/0)

19. Marcel is planning to deposit SEK 2000 into a bank account at the end of each year. He plans to make his first deposit at the end of year 2013 and the last one at the end of year 2020. Marcel counts on a yearly interest rate of 2 %.

How much money will there be on his account immediately after the last deposit? (2/0/0)

20. Sture has a one-person enterprise which buys ready-made wooden details made from pine. He only manufactures two products, stools and chests of drawers. Sture's tasks are to assemble and varnish these, and he cannot carry out these tasks simultaneously. The following data holds for his production:

	Working hours (h)		Available working hours per week (h)
	Stool	Chest of drawers	
Assembling	0.25	0.50	15
Varnishing	0.40	1.00	25
Profit per product	SEK 150	SEK 320	

Assume that Sture manufactures x stools and y chests of drawers in one week.

a) Sture receives an order of 40 stools and 10 chests of drawers. Will he be able to produce them in one working week? (2/0/0)

b) Calculate the maximum profit that Sture's enterprise can make in one working week. (0/4/0)

21. Are the following statements correct? Justify your answers.

a) $F(x) = 3e^{x}$ is an antiderivative of $f(x) = e^{3x}$ (1/0/0)

b) The graph of $f(x) = x^3 + ax$ has three different zeroes if the constant $a \leq 0$ (0/2/1)

22. Karolina pours a cup of coffee in a room where the temperature is 20°C. She immediately measures the temperature of the coffee and continues to do so every minute during the first 5 minutes. Karolina then adjusts a mathematical model to her measurements:

$$T(t) = 95\mathrm{e}^{-0.039t}$$

where T is the temperature of the coffee in °C and t is the time in minutes after Karolina started measuring the temperature.

a) Determine the temperature of the coffee when Karolina started to measure. (1/0/0)

b) Determine by what percentage the temperature of the coffee decreases each minute. (0/1/0)

c) Karolina's model corresponds well with reality in the beginning. Evaluate how well her model corresponds with reality over time. (0/1/1)

23.

Tartaglia (1500-1557)

The Italian Tartaglia was a mathematician who lived in the 16th century. He is considered to have formulated the following mathematical problem, here in a modern translation:

The sum of two positive numbers is 8. Determine the numbers so that the product of the difference of the numbers and the product of the numbers is as large as possible.

Your task is to solve Tartaglia's mathematical problem. (0/0/3)

24. It holds for the cubic function f that

- $f'(2) = -1$
- $f''(4) = 0$

Determine $f'(6)$ (0/0/3)

25. When Mario was born, his grandmother decided to save money for him in a jar. Her plan is to put in an amount corresponding to the square of Mario's age multiplied by 100 in the jar every time it is his birthday. Mario's uncles Sergio and Riccardo think about how much money there will be in the jar on Mario's sixth birthday.

Sergio says: *You can find out how much money there will be in the jar by calculating the integral* $\int_0^6 100x^2\,\mathrm{d}x$

Riccardo thinks for a while and replies: *No, it gives too small a value.*

Explain why the above integral gives a too small value if it is used to calculate how much money there will be in the jar on Mario's sixth birthday. (0/1/3)

To the student - Information about the oral part

You will be given a problem that you will solve in writing, and then you will present your solution orally. If you need, you can ask your classmates and your teacher for help when solving the problem. Your oral presentation starts with you presenting what the problem is about and then you describe and explain your solution. You must present all steps in your solution. However, if you have done the same calculation several times (for example in a table) it might be sufficient if you present some of the calculations. Your presentation should take a maximum of 5 minutes, and be held to a smaller group of your classmates and one or more teachers.

The problem given to you should, on the whole, be solved algebraically. You might need a calculator to do some of the calculations but, when presenting your solution, you should avoid referring to the use of your calculator for drawing graphs and/or symbolic handling (if that is the type of calculator you are using).

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

How complete, relevant and structured your presentation is

Your presentation must contain the necessary parts in order for a listener to follow and understand your thoughts. What you say should be in a suitable order and be relevant. The listener must understand how calculations, descriptions, explanations and conclusions are connected with each other.

How well you describe and explain the train of thought behind your solution

Your presentation should contain both descriptions and explanations. To put it simple, a description answers the question *how* and an explanation answers the question *why*. You describe something when you for instance tell *how* you have done a calculation. You explain something when you for instance justify *why* you could use a certain formula.

How well you use the mathematical terminology

In your presentation you should use a language that contains mathematical terms, expressions and symbols, suitable for the problem you have solved.

Mathematical terms are for example words like “exponent”, “function” and “graph”.
An example of a mathematical expression is that x^2 is read “*x* to the power 2” or “*x* squared”.
Some examples of mathematical symbols are π and $f(x)$, which are read “pi” and “*f* of *x*”.

Problem 1. The maximum volume of the cuboid

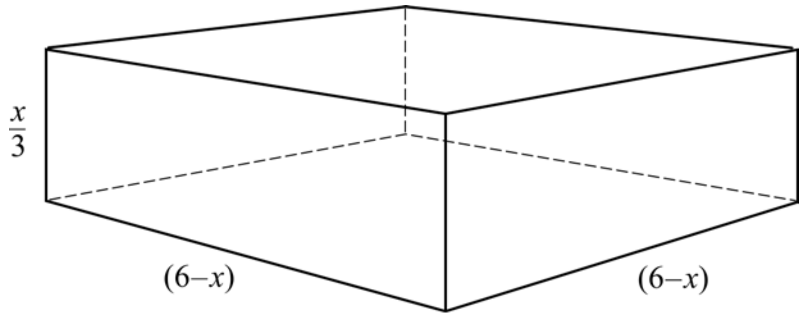
Name:______________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

The figure below shows a cuboid with sides $\frac{x}{3}$, $(6-x)$ and $(6-x)$ length units.

Use the derivative and calculate the largest possible volume of the cuboid.



Problem 2. The value of the derivative

Name:_______________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:
- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

It holds for the function f that $f(x) = x^3 + 5x^2 + 7$

a) Find $f'(4)$ by using the rules of differentiation.

b) Find $f'(4)$ by using the rate of change*.

c) Explain why you receive different answers in the a)- and b)-task. Feel free to use a figure.

* *Comment:* Rate of change is sometimes called difference quotient.

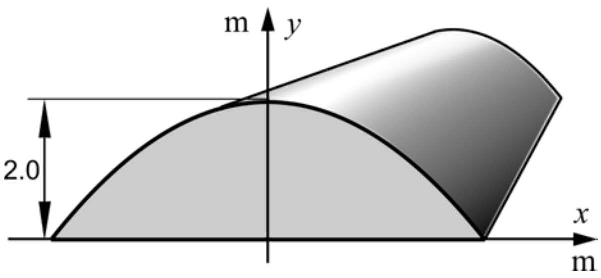
Problem 3. The berm

Name:______________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:
- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

A 2.0 m high berm will be built along a motor way as a noise barrier. The shape of the berm can be described by the quadratic curve $y = 2.0 - 0.125x^2$

Calculate how many m^3 of earth that will be needed per kilometer of berm.



Problem 4. Depositing money

Name:______________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration:

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution,
- how well you use the mathematical terminology.

Andrea and Beata are going to start saving money. They have one account each where the yearly interest rate is 2 %. Andrea is planning to deposit a lump sum of SEK 15000 at the end of year 2012. Beata is planning to deposit SEK 1000 every year, starting at the end of year 2012.
How much money will Andrea and Beata have on their respective accounts, immediately after Beata's last deposit at the end of year 2026?

Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	**E**	**C**	**A**	**Max**
Fullständighet, relevans och struktur Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.	Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig. (1/0/0)		Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår. Redovisningen är välstrukturerad. (1/0/1)	(1/0/1)
Beskrivningar och förklaringar Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.	Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar. Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad. (1/0/0)		Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar. (1/0/1)	(1/0/1)
Matematisk terminologi Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen. (1/0/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen. (1/1/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen. (1/1/1)	(1/1/1)
Summa				(3/1/3)

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankgången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt olika modeller:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga
Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan innehålla något ovidkommande eller sakna något steg. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

Förutom den allmänna beskrivningen av kraven kan ibland mer utförliga beskrivningar ges i samband med de bedömda elevlösningar där kommunikationspoäng förekommer.

Provsammanställning - Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3b i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 7b_1 och 7b_2 den första respektive andra poängen i uppgift 7b.

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del A	M_1				1								
	M_2												1
	M_3				1								
	M_4												1
	M_5				1								
	M_6								1				
	M_7												1
Del B	1	1											
	2	1											
	3	1											
	4	1											
	5a		1										
	5b						1						
	5c						1						
	6					1							
	7a					1							
	7b_1					1							
	7b_2								1				
	8_1					1							
	8_2									1			
	9a	1											
	9b											1	
	10a											1	
	10b									1			
Del C	11_1		1										
	11_2		1										
	12_1		1										
	12_2		1										
	12_3		1										
	13a_1			1									
	13a_2			1									
	13b_1							1					
	13b_2							1					
	13b_3								1				
	14a		1										
	14b_1						1						
	14b_2						1						
	15											1	
	16_1					1							
	16_2						1						
	16_3									1			
	16_4												1

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del D	17_1			1									
	17_2			1									
	18a	1											
	18b					1							
	19_1			1									
	19_2			1									
	20a_1				1								
	20a_2				1								
	20b_1							1					
	20b_2							1					
	20b_3							1					
	20b_4								1				
	21a				1								
	21b_1								1				
	21b_2								1				
	21b_3												1
	22a			1									
	22b							1					
	22c_1							1					
	22c_2											1	
	23_1									1			
	23_2											1	
	23_3											1	
	24_1												1
	24_2												1
	24_3												1
	25_1								1				
	25_2												1
	25_3												1
	25_4												1
	Total	**6**	**7**	**7**	**6**	**6**	**5**	**7**	**7**	**4**	**-**	**6**	**11**
Σ	**72**	**26**				**25**				**21**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3b i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma3b															
					Algebra		Samband och förändring											Problem-lösning		
		E	C	A	A1	A2	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	PI	P3	P4
Del A		3	1	3																
Del B	1	1	0	0			X													
	2	1	0	0	X															
	3	1	0	0	X															
	4	1	0	0	X	X														
	5a	1	0	0						X	X									
	5b	0	1	0						X	X									
	5c	0	1	0						X	X									
	6	0	1	0				X												
	7a	0	1	0						X					X					
	7b	0	2	0						X					X					
	8	0	1	1						X		X								
	9a	1	0	0				X												
	9b	0	0	1				X										X		
	10a	0	0	1		X			X									X		
	10b	0	0	1		X			X											
Del C	11	2	0	0												X	X			
	12	3	0	0						X	X			X						
	13a	2	0	0						X	X		X					X		
	13b	0	3	0						X	X		X					X		
	14a	1	0	0	X															
	14b	0	2	0	X															
	15	0	0	1												X	X	X		
	16	0	2	2	X			X		X	X									
Del D	17	2	0	0						X	X		X					X		
	18a	1	0	0						X			X							
	18b	0	1	0						X										
	19	2	0	0			X											X	X	
	20a	2	0	0			X													
	20b	0	4	0			X											X	X	
	21a	1	0	0												X				
	21b	0	2	1	X				X											
	22a	1	0	0								X								
	22b	0	1	0								X								
	22c	0	1	1				X				X								
	23	0	0	3	X				X	X	X		X	X	X			X		X
	24	0	0	3	X				X	X	X		X	X						
	25	0	1	3				X								X	X			
Total		26	25	21																

Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 72 poäng varav 26 E-, 25 C- och 21 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 19 poäng
D: 29 poäng varav 9 poäng på minst C-nivå
C: 38 poäng varav 16 poäng på minst C-nivå
B: 48 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 57 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Del B

1. **Max 1/0/0**

Korrekt svar ($2\cdot 3^3$) +1 E_B

2. **Max 1/0/0**

Korrekt svar (6) +1 E_B

3. **Max 1/0/0**

Korrekt svar (D: $4x^3+2x^2$) +1 E_B

4. **Max 1/0/0**

Korrekt svar (3) +1 E_B

5. **Max 1/2/0**

a) Korrekt svar ($f'(x)=12x^3+6$) +1 E_P

b) Korrekt svar ($f'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}$) +1 C_P

c) Korrekt svar $\left(f'(x)=-\dfrac{2}{3}x^{-2}+\dfrac{3}{2}\right)$ +1 C_P

Kommentar: Svar utan ” $f'(x)$” anses vara korrekt.

6. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (C: Intäkten beror av hur många stolar som tillverkas i företaget.) +1 C_B

7. **Max 0/3/0**

a) Korrekt svar ($x = 4$) +1 C_B

b) Korrekt intervall, t.ex. ”x är större än eller lika med 2 och x är mindre än eller lika med 4” +1 C_B

där det korrekta intervallet kommuniceras på en nivå som motsvarar kunskapskraven för C, dvs. med korrekt använda olikhetstecken ($-2 \le x \le 4$) +1 C_K

Kommentar: Vissa läromedel inkluderar inte derivatans nollställen i intervallet. Vid bedömning bör detta beaktas.

8. **Max 0/1/1**

Anger en korrekt funktion, t.ex. $y = e^x$ +1 C_B

med korrekt införd konstant ($y = ae^x$) +1 A_B

9. **Max 1/0/1**

a) Korrekt svar (8) +1 E_B

b) Korrekt svar (2) +1 A_{PL}

10. **Max 0/0/2**

a) Godtagbart svar ($x_1 \approx -2{,}3$; $x_2 \approx 1$ och $x_3 \approx 2{,}8$) +1 A_{PL}

b) Godtagbart svar ($k > 10$) +1 A_B

Del C

11. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion, $2x^3$ +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (14) +1 E_P

12. **Max 3/0/0**

Korrekt bestämning av derivatans nollställen, $x_1 = 0,\ x_2 = 2$ +1 E_P

med korrekt bestämning av extrempunkternas koordinater, $(0,\ 0)$ och $(2, -4)$ +1 E_P

Godtagbar verifiering av extrempunkternas karaktär
(maximipunkt $(0, 0)$ och minimipunkt $(2, -4)$) +1 E_P

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

13. **Max 2/3/0**

a) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $10x + 3 = 18$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = 1{,}5$) +1 E_{PL}

b) Korrekt bestämning av tangentens ekvation, $y = 20x - 36$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($(1{,}8;\ 0)$) +1 C_{PL}

Lösningen (deluppgift b) kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, beteckningar såsom $f(x)$, $f'(x)$, $f'(6)$, termer såsom koordinater, tangent och *x*- axel samt hänvisning till tangentens ekvation etc. +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

14. **Max 1/2/0**

a) Godtagbar lösning med korrekt svar $\left(\dfrac{x+2}{2}\right)$ +1 E_P

b) Godtagbar ansats, t.ex. skriver om uttrycket till $\dfrac{x^2 + 8x + 16}{2(x-4)(x+4)}$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(\dfrac{x+4}{2(x-4)}\right)$ +1 C_P

15. **Max 0/0/1**

Godtagbar lösning, där insikt visas om att problemet löses genom direkt avläsning i graf, med korrekt svar (-1) +1 A_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

16. **Max 0/2/2**

Korrekt tecknad ändringskvot, $\dfrac{\dfrac{A}{(x+h)}-\dfrac{A}{x}}{h}$ +1 C_B

med korrekt förenkling av ändringskvoten, t.ex. $\dfrac{-Ah}{hx(x+h)}$ +1 C_P

med korrekt bestämning av derivatan, $f'(x)=\dfrac{-A}{x^2}$ +1 A_B

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, beteckningar såsom $f(x)$, $f'(x)$, $f(x+h)$, korrekt användning av symbolen $\lim\limits_{h\to 0}$, bråkstreck och hänvisning till derivatans definition etc. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Del D

17. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. ritar graferna till derivatorna i ett och samma koordinatsystem +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x=0{,}75$) +1 E_{PL}

18. **Max 1/1/0**

a) Godtagbar lösning med godtagbart svar ($K'(30)\approx 1700$) +1 E_B

b) Godtagbar tolkning (t.ex. ”Antalet kanadagäss ökar med 800 per år då $t=20$ år”) +1 C_B

Källa: Jägareförbundet (2009). Kanadagås, publ. 2009-09-21, (hämtat 2010-10-07), http://www.jagareforbundet.se/Viltet/ViltVetande/Artpresentationer/Kanadagas/

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

19. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. använder formeln för geometrisk summa +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (17166 kr) +1 E_M

20. **Max 2/4/0**

a) Godtagbar inledning till resonemang, t.ex. undersöker hur många arbetstimmar som krävs för att montera 40 pallar och 10 byråer +1 E_R

med godtagbart slutfört resonemang med korrekt svar (Nej) +1 E_R

b) Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer det system av olikheter som motsvarar kraven

$$\begin{cases} 0{,}25x + 0{,}50y \le 15 \\ 0{,}40x + y \le 25 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

+1 C_{PL}

med godtagbar fortsättning, bestämmer vinstfunktionens värde för någon av de aktuella punkterna +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (9100 kr) +1 C_{PL}

Lösningen (deluppgift b) kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, parenteser, tydlig figur, olikhetstecken och termer såsom rät linje, koordinatsystem, olikheter, skärningspunkt etc. +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

21. **Max 1/2/1**

a) Godtagbart svar som visar insikt om att villkoret $F'(x) = f(x)$ inte är uppfyllt, (t.ex. ”Nej, för om man deriverar *F* får man inte *f*.”) +1 E_R

b)

E	C		A
	Troliggör för minst två specialfall att påståendet stämmer om $a < 0$ *eller* visar att påståendet inte stämmer om $a = 0$.	Troliggör för mer än två specialfall att påståendet stämmer om $a < 0$ *och* visar att påståendet inte stämmer om $a = 0$.	Visar att påståendet stämmer för *alla* $a < 0$ *och* visar att påståendet inte stämmer om $a = 0$.
	1 C_R	2 C_R	2 C_R och 1 A_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Forts. uppgift 21

Kommentar (införd 2013-02-08): Bedömningsanvisningen ovan utgår från att eleven utreder fallen $a = 0$ och $a < 0$ separat och sedan drar separata slutsatser om dessa. Om någon sammanfattning av slutsatserna görs så är den av typen ”Det stämmer ibland” eller ”Det stämmer inte alltid.”

Om eleven istället visar att påståendet ”Grafen till $f(x) = x^3 + ax$ har tre olika nollställen om konstanten $a \leq 0$” är falskt genom att t.ex. peka på att fallet $a = 0$ strider mot påståendet, så ges två resonemangspoäng på C- och en resonemangspoäng på A-nivå.

22. **Max 1/2/1**

a) Godtagbar lösning med korrekt svar ($95°$) +1 E_M

b) Godtagbar lösning med godtagbart svar (3,8 %) +1 C_M

c)

E	**C**	**A**
	Utvärderar Karolinas modell med ett enkelt omdöme. Omdömet visar insikt om att Karolinas modell inte tar hänsyn till omgivningens temperatur. 1 C_M	Utvärderar Karolinas modell med ett nyanserat omdöme. Omdömet visar insikt om att Karolinas modell inte tar hänsyn till omgivningens temperatur *och* hur denna brist påverkar modellens egenskaper. 1 C_M och 1 A_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

23. **Max 0/0/3**

Korrekt tecknad funktion för produkten i två variabler, t.ex. $D = xy(y - x)$ +1 A_B

där en variabel eliminerats korrekt, t.ex. $D = x(8 - x)(8 - 2x)$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning, inklusive godtagbar verifiering av maximum, med godtagbart svar ($6{,}31$ och $1{,}69$) +1 A_{PL}

Kommentar: Observera att om eleven härlett funktionen $D = 2x^3 - 24x^2 + 64x$ erhålls maximum då $x \approx 1{,}7$ och om eleven härlett funktionen $D = -2x^3 + 24x^2 - 64x$ erhålls maximum då $x \approx 6{,}3$

Källa: Tichomirov, V.M. (1990). *Stories about Maxima and Minima*. Providence, R.I.: American Mathematical Society. Sid.37

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

24. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, t.ex. förklarar att derivatan är en funktion av andra graden som har en extrempunkt då $x = 4$ +1 A_R

med godtagbart slutfört resonemang med korrekt svar (På grund av symmetri hos andragradsfunktionen måste $f'(6) = f'(2) = -1$) +1 A_R

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, beteckningar såsom $f(x)$, $f'(x)$, $f'(6) = -1$ och termer såsom symmetri, andragradsfunktion, tredjegradsfunktion, graf, derivata och en tydlig figur med införda beteckningar etc. +1 A_K

Kommentar: Även en algebraisk ansats som utgår från de givna villkoren och en generell tredjegradsfunktion (t.ex. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$) och som leder till sambanden $24a + 2b = 0$ och $12a + 4b + c = -1$ ges den första poängen.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

25. **Max 0/1/3**

E	C	A	
	Anger någon relevant egenskap hos minst en av modellerna (summan eller integralen) som förklaring till skillnaden, t.ex. antyder att skillnaden har att göra med att mormor bara sätter in pengar ibland *eller* att hon inte sätter in pengar hela tiden.	Kopplar skillnaden till att de två modellerna (summan och integralen) baseras på en diskret respektive en kontinuerlig funktion, men ger ingen godtagbar förklaring till varför summan är större än integralen *eller* diskuterar/visar att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av ett antal staplar.	Diskuterar/visar att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av ett antal staplar *och* förklarar varför summan blir större än integralen genom att t.ex. hänvisa till en figur som visar hela tidsperioden där det framgår att arean under kurvan (integralen) är mindre än den sammanlagda arean av de sex staplarna (summan).
	1 C_R	1 C_R och 1 A_R	1 C_R och 2 A_R

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara integralbeteckningar, likhetstecken och termer såsom funktionsvärde, diskret och kontinuerlig funktion, area, summa och en tydlig figur över hela tidsperioden etc. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Bedömda elevlösningar

Uppgift 12

Elevlösning 1 (2 E_P)

$f(x) = x^3 - 3x^2 \qquad f'(x) = 3x^2 - 6x$

$\frac{3x^2 - 6x}{3} = \frac{0}{3}$

$x^2 - 2x = 0$

$x = +\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2} = 1 \pm 1$

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = 0 - 6 = -6$, dvs $x = 0$ Maxpunkt

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6$, dvs $x = 2$ Minpunkt

Kommentar: Elevlösningen innehåller ingen beräkning av *y*-koordinaterna. Däremot verifieras extrempunkternas karaktär. Sammantaget ges lösningen den första och den tredje procedurpoängen på E-nivå.

Uppgift 13b

Elevlösning 1 (2 C_{PL} och 1 C_K)

$g(x) = x^2 + 8x$

$g'(x) = 2x + 8$

$g'(6) = 2 \cdot 6 + 8 = 20$

$y = kx + m$

$84 = 20 \cdot 6 + m$

$m = -36$

$g(6) = 6^2 + 8 \cdot 6 = 36 + 48 = 84$

$y = 20x - 36$

$20x = 36$

$x = 36/20 = 9/5$

SVAR: $\left(\frac{9}{5}, 0\right)$

Kommentar: Elevlösningen är någorlunda strukturerad med korrekt hantering av symbolerna $g(x)$, $g'(x)$ och $g(6)$. Det framgår dock inte med tydlighet att $k = g'(6)$ och att ekvationen $y = 0$ löses för att beräkna skärningen med *x*-axeln. Elevlösningens kvalitet motsvarar därmed nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 15

Elevlösning 1 (1 A_{PL})

$F(5) - F(-2) = -2 - (-1) = -1$ SVAR: -1

Kommentar: I elevlösningen visas insikt om att problemet löses genom avläsning i graf, även om det inte framgår varför avläsning i grafen skett. Elevlösningen motsvarar en problemlösningspoäng på A-nivå.

Uppgift 16

Elevlösning 1 (1 C_B, 1 C_P, 1 A_B och 1 A_K)

derivatans definition

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{A}{x+h} - \frac{A}{x}}{h} = \frac{\frac{Ax - A(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \frac{Ax - Ax - Ah}{hx(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-Ah}{hx^2 + h^2x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-A}{x^2 + hx} = -\frac{A}{x^2}$$

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt härledning av derivatan, vilket motsvarar en begrepps- och en procedurpoäng på C-nivå samt en begreppspoäng på A-nivå. Under förenklingen av ändringskvoten tappas ”lim” bort på första och andra raden, men vid själva gränsvärdesbestämningen på sista raden är skrivsättet korrekt, vilket är väsentligt i denna uppgift. Lösningen uppfyller därmed nätt och jämnt kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 18b

Elevlösning 1 (1 C_B)

Kanadagässen ökade med en hastighet av 800 gäss/år efter 20 år.

Kommentar: Tolkningen att det är en hastighet i antal kanadagäss/år som efterfrågas framgår av lösningen. Frasen ”efter 20 år” är otydlig eftersom det skulle kunna tolkas som att hastigheten är konstant då $t > 20$. Lösningen motsvarar därmed nätt och jämnt en begreppspoäng på C-nivå.

Uppgift 20b

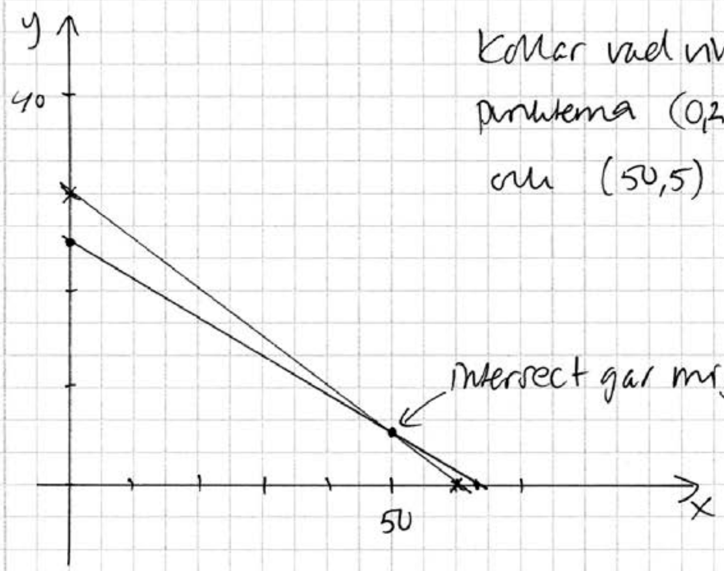
Elevlösning 1 (3 C_{PL} och 1 C_K)

b) x = pallar y = byråer

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}25x + 0{,}50y = 15 \\ 0{,}40x + 1{,}00y = 25 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{array}\right\} \text{ekvationer}$$

$y = 30 - 0.5x$

$y = 25 - 0{,}40x$



Kollar vad vinsten blir i punkterna (0,25) och (60,0) och (50,5)

x	y	vinst	
0	25	$0 \cdot 150 + 25 \cdot 320 =$ 8000 kr	
60	0	$60 \cdot 150 + 0 \cdot 320 =$ 9000 kr	
50	5	$50 \cdot 150 + 5 \cdot 320 =$ 9100 kr	Maxvinsten

Kommentar: Elevlösningen visar hur grafräknare används på ett godtagbart sätt för att lösa uppgiften, vilket motsvarar tre problemlösningspoäng på C-nivå. När det gäller den skriftliga kommunikativa förmågan används inte olikhetstecken i de inledande sambanden och olikheterna kallas för ekvationer. Dessutom framgår inte med tydlighet i figuren vilket område som anses vara aktuellt. Redovisningen av vinstberäkningarna och hur grafräknaren använts för att bestämma skärningspunkten är någorlunda tydlig. Elevlösningen bedöms nätt och jämnt motsvara en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 21b

Elevlösning 1 (1 C_R)

$f(x) = x^3 + ax \quad a \leq 0$

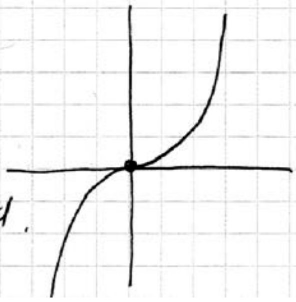
Testar $a = -5$

$f(x) = x^3 - 5x$ på graffönstret ser ut så här

Den har tre nollställen

Testar $a = 0$

$f(x) = x^3$ har ett nollställe



SVAR: Det stämmer inte alltid.

Kommentar: I elevlösningen undersöks antalet nollställen då $a = -5$ och då $a = 0$ med grafräknare. Om elevlösningen innehållit en undersökning av ytterligare ett specialfall, t.ex. $a = -10$, skulle lösningens kvalitet ha motsvarat två resonemangspoäng på C-nivå. Lösningen ges nu en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C_R och 1 A_R)

$f(x) = x^3 + ax$

Nollställen om $f(x) = 0$

$a \leq 0$

$\boxed{a = 0}$	$\boxed{a < 0}$
$x^3 = 0$	$x^3 + ax = 0$
$x = 0$	$x(x^2 + a) = 0$
Ett nollställe	$x_1 = 0 \quad \| \quad x^2 + a = 0$
	$x^2 = -a$
	$x = \pm\sqrt{-a}$
	ett nollställe Blir 2 nollställen om $a<0$

Om $a = 0$ fås ett

och om $a < 0$ fås tre nollställen. Det är sant om $a < 0$.

Kommentar: Elevlösningen uppvisar en korrekt, generell undersökning. Lösningen ges samtliga resonemangspoäng.

Uppgift 22c

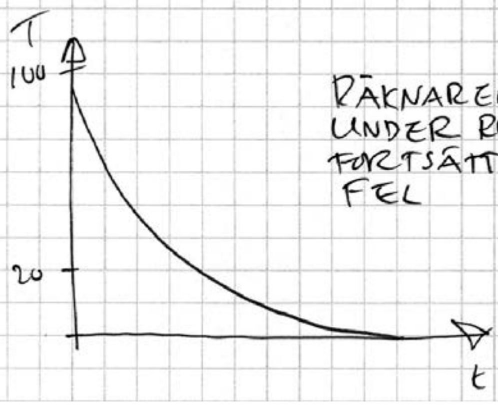
Elevlösning 1 (1 C_M)

c) $T(t) = 95e^{-0,039t}$

Det märks inte i modellen att det är 20° i rummet

Kommentar: I elevlösningen framgår att modellen inte tar hänsyn till rumstemperaturen, men inte på vilket sätt detta påverkar modellens egenskaper. Elevlösningen ges därmed en modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (1 C_M och 1 A_M)



RÄKNAREN VISAR ATT GRAFEN GÅR UNDER RUMSTEMPERATUREN OCH FORTSÄTTER ATT MINSKA. DET ÄR FEL

Elevlösning 3 (1 C_M och 1 A_M)

Modellen bli fel för grafen går under 20°-nivån och nämer sig noll. kaffet kan ju aldrig bli kallare än rummet.

Elevlösning 4 (1 C_M och 1 A_M)

$T(60) = 95 \cdot e^{-0,039 \cdot 60} \approx 9,15$

$T(120) = 95 \cdot e^{-0,039 \cdot 120} \approx 0,88$

$T(200) = 95 \cdot e^{-0,039 \cdot 200} \approx 0,04$

Temperaturen borde närma sig 20°C vilket den inte gör

Kommentar: I elevlösning 2, 3 och 4 framgår att modellen inte tar hänsyn till rumstemperaturen och även på vilket sätt detta påverkar modellen (”grafen går under rumstemperaturen och fortsätter att minska”, ”grafen går under 20°-nivån och närmar sig noll” respektive ”Temperaturen borde närma sig 20° vilket den inte gör”). Elevlösningarna ges två modelleringspoäng, en på C-nivå och en på A-nivå.

Uppgift 23

Elevlösning 1 (1 A_B och 2 A_{PL})

$x + y = 8 \qquad y = 8 - x$

Talens differens $x - (8 - x)$

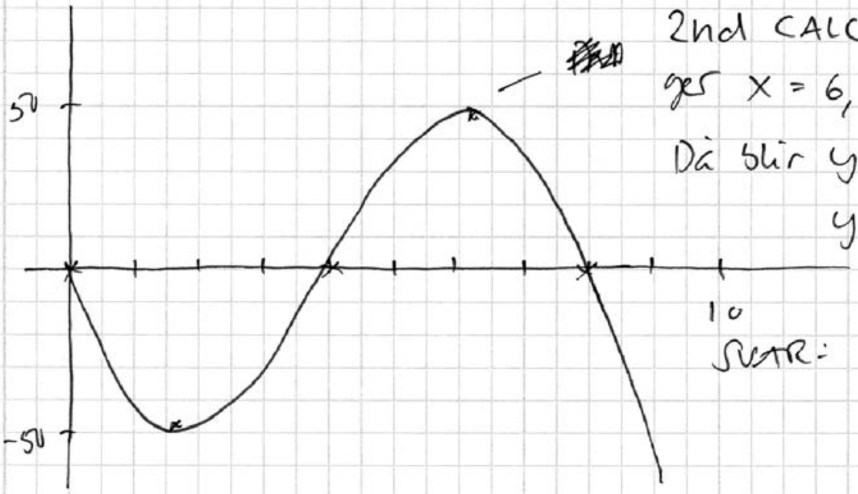
Talens produkt $x(8 - x)$

Deras gemensamma produkt $(2x - 8)(8x - x^2)$

$y = -2x^3 + 16x^2 - 64x + 8x^2$

$y = -2x^3 + 24x^2 - 64x$

Ritar på grafräknaren



2nd CALC maximum ger $x = 6{,}30940$

Då blir $y = 8 - 6{,}30940$

$y = 1{,}6906$

SVAR: 6,30 och 1,69

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt härledning av ett uttryck för produkten. Lösningen visar även hur grafräknaren används på ett godtagbart sätt för bestämning och verifiering av maximum. Sammantaget motsvarar lösningen en begreppspoäng och två problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (0 poäng)

$0 < x < 8$ $\qquad$ $x + y = 8$

$0 < y < 8$

$x = 5 \quad y = 3 \quad 5 \cdot 3(5-3) = 30$

$x = 7 \quad y = 1 \quad 7 \cdot 1(7-1) = 42$

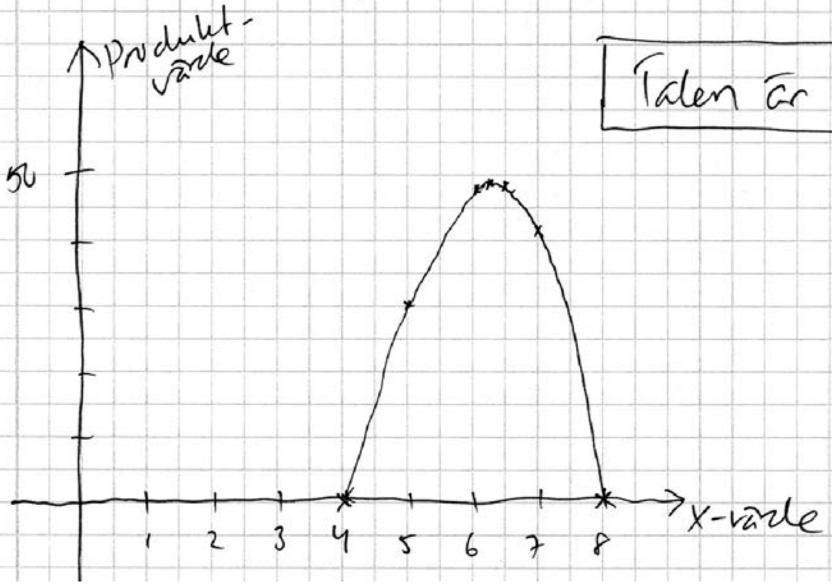
$x = 6.5 \quad y = 1.5 \quad 6.5 \cdot 1.5(6.5-1.5) = 48.75$

$x = 6,4 \quad y = 1,6 \quad 6,4 \cdot 1,6(6,4-1,6) = 49,152$

$x = 6,3 \quad y = 1,7 \quad 6,3 \cdot 1,7(6,3-1,7) = 49,266$

$x = 6,2 \quad y = 1,8 \quad 6,2 \cdot 1,8(6,2-1,8) = 49,104$

$\boxed{\text{Talen är 6,3 och 1,7}}$

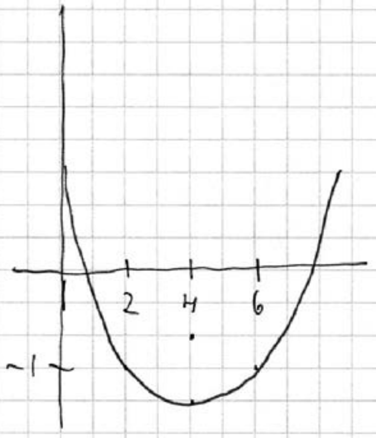


Kommentar: Elevlösningen visar hur ett korrekt resultat uppnås med hjälp av prövning. Prövningen styrker inte att maximum verkligen hittats och är ineffektiv i detta sammanhang. En uppgift av detta slag ska, på A-nivå, kunna lösas med mer effektiva metoder som bygger på användning av symbolisk algebra (i detta fall ett funktionsuttryck). Sammantaget ges lösningen inga problemlösningspoäng på A-nivå.

Uppgift 24

Elevlösning 1 (2 A_R)

$f'(x)$ måste vara en andragradare och
$f''(x)$ måste vara en rät linje



$f'(6) = f'(2)$
eftersom symetrilingen
går i $x = 4$
$f'(6)$ är alltså lika med
-1

SVAR: $f'(6) = -1$

Kommentar: Elevlösningen visar ett godtagbart resonemang som leder till ett korrekt svar. Att $f''(4) = 0$ betyder att derivatafunktionen har en extrempunkt då $x = 4$ förklaras inte och inte heller kopplingen mellan extrempunkten och symmetrilinjen. Att andraderivatan är en rät linje är inte relevant. På grund av dessa otydligheter uppfyller inte lösningen kravet för kommunikationspoäng på A-nivå. Sammantaget ger lösningen två resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (2 A_R och 1 A_K)

f'' är 0 i punkten $x = 4$. Detta är ett maximum eller minimum till andragrads funktionen f'. Andragradsfunktioner är symmetriska med symmetrilinje där extrempunkten finns. Därför är $f'(2)$ lika med $f'(6)$, dvs -1.

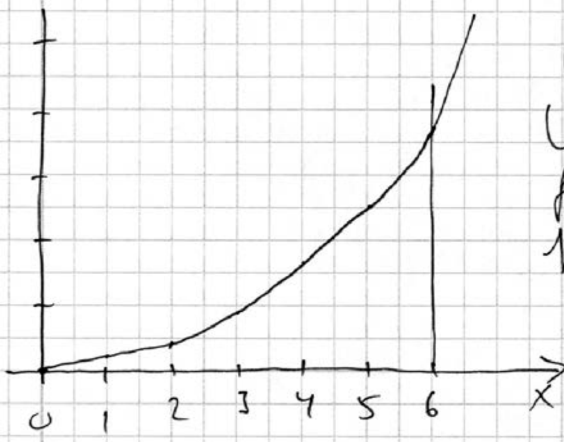
Kommentar: I elevlösningen förklaras både vad $f''(4) = 0$ betyder och att extrempunkten ligger på symmetrilinjen. Redovisningen skulle ha varit ännu enklare att följa och förstå om den innehållit en skiss med derivatafunktionen, symmetrilinjen och punkterna $(2, -1)$ och $(6, -1)$ markerade. Sammantaget motsvarar detta två resonemangspoäng, men nätt och jämnt en kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 25

Elevlösning 1 (0 poäng)

$$\int_0^6 100x^2\,dx = \left[\frac{100x^3}{3}\right]_0^6 = \frac{100\cdot 6^3}{3} - 0 = 7200$$

Mormor lägger $100\cdot 0^2 + 100\cdot 1^2 + 100\cdot 2^2 + 100\cdot 3^2 + 100\cdot 4^2 + 100\cdot 6^2 + 100\cdot 5^2 = 9100$



Integralen ger ett för litet värde eftersom funktionen inte visar hur mycket Mario har i burken. Den visar bara ålder hur mycket hans mormor lägger till. Och om funktionen inte visar det vi vill ha, så är det inte troligt att integralen gör det heller.

Kommentar: Elevlösningen visar korrekta beräkningar men ingen relevant egenskap som kan kopplas till skillnaden anges. Sammantaget ger denna lösning 0 poäng.

Elevlösning 2 (1 C_R)

Eftersom man bara får in pengar en gång per år stämmer det inte.

Kommentar: Elevlösningen antyder att skillnaden kan ha att göra med att mormors summa är en diskret funktion, vilket nätt och jämnt motsvarar en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösning 3 (1 C_R och 1 A_R)

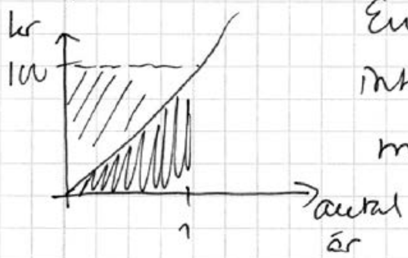
Om man använder integralen för att bestämma hur mycket pengar som finns i burken efter 6 år får man fel värde eftersom $y=100x^2$ är en kontinuerlig funktion dvs man förutsätter att mormor sätter in pengar hela tiden medans hon i själva verket bara sätter in pengar en gång om året

Kommentar: I elevlösningen kopplas skillnaden till att det rör sig om en kontinuerlig och en diskret funktion. Dock ges ingen förklaring till varför summan är större än integralen. Sammantaget motsvarar detta två resonemangspoäng, en på C- och en på A-nivå.

Elevlösning 4 (1 C_R och 1 A_R)

Integralen är detsamma som arean under grafen då man inte har någon area under x-axeln som i det här fallet. Då Mario är ett år skulle det ha funnits $\int_0^1 100x^2\,dx = \left[\frac{100x^3}{3}\right]_0^1 = 33$ kr

Men på Marios födelsedag lägger hans mamma i 100 kr.

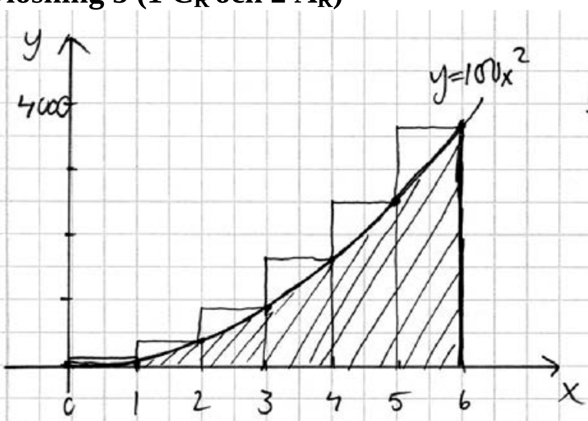


Enligt diagrammet syns det att integralen bara blir 33 kr efter ett år, men att där finns 100 kr i burken.

Eftersom även arean ovanför upp till 100-strecket visar faktiskt antal pengar i burken. På samma sätt måste man hela tiden lägga till en viss area som finns ovanför grafen för att få fram hur mycket som finns i burken vilket gör att integralen får ett för litet värde.

Kommentar: Elevlösningen visar medvetenhet om att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av ett antal staplar. Resonemanget om integral- och stapelarea rör bara det första året och det är därför oklart varför integralen verkligen är mindre än summan över hela tidsperioden. Sammantaget ger lösningen två resonemangspoäng, en på C- och en på A-nivå.

Elevlösning 5 (1 C_R och 2 A_R)



▨ Det integralen beräknar

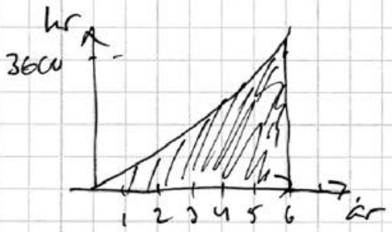
□ + ▨ Det Mario egentligen får.

Alltså blir integralen mindre

Kommentar: Lösningen innehåller en tydlig figur med 6 staplar som visar att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av ett antal staplar. Det framgår av lösningen att integralen har mindre värde än stapelsumman. Lösningen saknar dock förklaringar och är därmed, trots den tydliga figuren, kommunikationsmässigt knapphändig. Kommunikationspoäng på A-nivå erhålls därmed inte.

Elevlösning 6 (1 C_R, 2 A_R och 1 A_K)

$\int_0^6 100x^2\,dx$ är arean under grafen för funktionen $100x^2$



$$\int_0^6 100x^2\,dx = \left[\frac{100}{3}x^3\right]_0^6 = \frac{100}{3}\cdot 6^3 - \frac{100}{3}\cdot 0^3 =$$

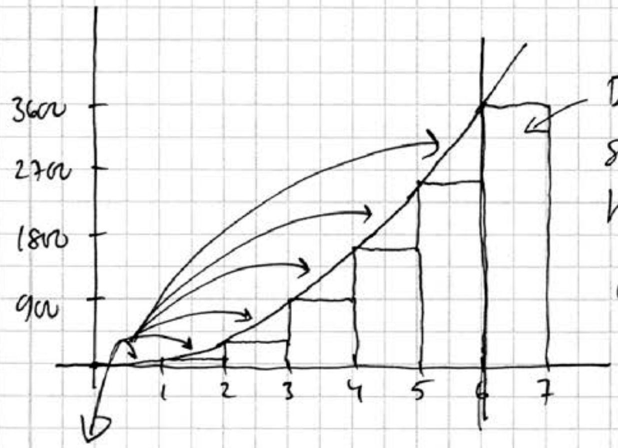
7200 kr

Det kommer egentligen satt in är

$100\cdot 0^2 + 100\cdot 1^2 + 100\cdot 2^2 + 100\cdot 3^2 + 100\cdot 4^2 + 100\cdot 5^2 + 100\cdot 6^2 =$

$= 9100$ kr

Detta har illustreras



Dessa pengar får han på sin 6 års dag och därför har han dem också

Och det är därför $\int_0^6 100x^2\,dx$ inte stämmer för den räknar bara fram till 6 år

Man ser att sista stapeln har större area än de små "trianglarna" under kurvan

Kommentar: Elevlösningen är lätt att följa och förstå och visar med en tillräckligt tydlig figur att integralen motsvarar arean under kurvan och att summan motsvarar arean av sex staplar. Det framgår av figuren och förklaringarna att integralen har mindre värde än stapelsumman. Sammantaget anses elevlösningen uppfylla kraven för resonemangs- och kommunikationspoäng på A-nivå.

Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnena.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Kunskapskrav Matematik kurs 3b och 3c

Betyget E – Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena **i bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

Betyget D – Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

Betyget C – Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**. omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

Betyget B – Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

Betyget A – Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja**, tillämpa **och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.
Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

Centralt innehåll Matematik kurs 3b

Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:

Algebra

A1 Begreppen polynom och rationella uttryck samt generalisering av aritmetikens lagar till hantering av dessa begrepp.
A2 Algebraiska och grafiska metoder för att lösa polynomekvationer av högre grad.

Samband och förändring

F6 Användning av begreppet geometrisk summa samt linjär optimering i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.
F7 Orientering kring kontinuerlig och diskret funktion samt begreppet gränsvärde.
F8 Egenskaper hos polynomfunktioner av högre grad.
F9 Begreppen sekant, tangent, ändringskvot och derivata för en funktion.
F10 Härledning och användning av deriveringsregler för potens- och exponentialfunktioner samt summor av funktioner.
F11 Introduktion av talet e och dess egenskaper.
F12 Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av derivatans värde för en funktion.
F13 Algebraiska och grafiska metoder för lösning av extremvärdesproblem inklusive teckenstudium och andraderivatan.
F14 Samband mellan en funktions graf och funktionens första- och andraderivata.
F15 Begreppen primitiv funktion och bestämd integral samt sambandet mellan integral och derivata.
F16 Bestämning av enkla integraler i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.

Problemlösning

P1 Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
P3 Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
P4 Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.

Bedömningsformulär

Elev:__________________________ Klass:_______________ Provbetyg: ____________

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del A	M_1												
	M_2												
	M_3												
	M_4												
	M_5												
	M_6												
	M_7												
Del B	1												
	2												
	3												
	4												
	5a												
	5b												
	5c												
	6												
	7a												
	7b_1												
	7b_2												
	8_1												
	8_2												
	9a												
	9b												
	10a												
	10b												
Del C	11_1												
	11_2												
	12_1												
	12_2												
	12_3												
	13a_1												
	13a_2												
	13b_1												
	13b_2												
	13b_3												
	14a												
	14b_1												
	14b_2												
	15												
	16_1												
	16_2												
	16_3												
	16_4												

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del D	17_1												
	17_2												
	18a												
	18b												
	19_1												
	19_2												
	20a_1												
	20a_2												
	20b_1												
	20b_2												
	20b_3												
	20b_4												
	21a												
	21b_1												
	21b_2												
	21b_3												
	22a												
	22b												
	22c_1												
	22c_2												
	23_1												
	23_2												
	23_3												
	24_1												
	24_2												
	24_3												
	25_1												
	25_2												
	25_3												
	25_4												
	Total												
Σ													

	Total	**6**	**7**	**7**	**6**	**6**	**5**	**7**	**7**	**4**	**-**	**6**	**11**
Σ	**72**	**26**				**25**				**21**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation