Delprov B	Uppgift 1-10. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 11-16. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 65 poäng varav 23 E-, 23 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 26 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 34 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 44 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 53 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

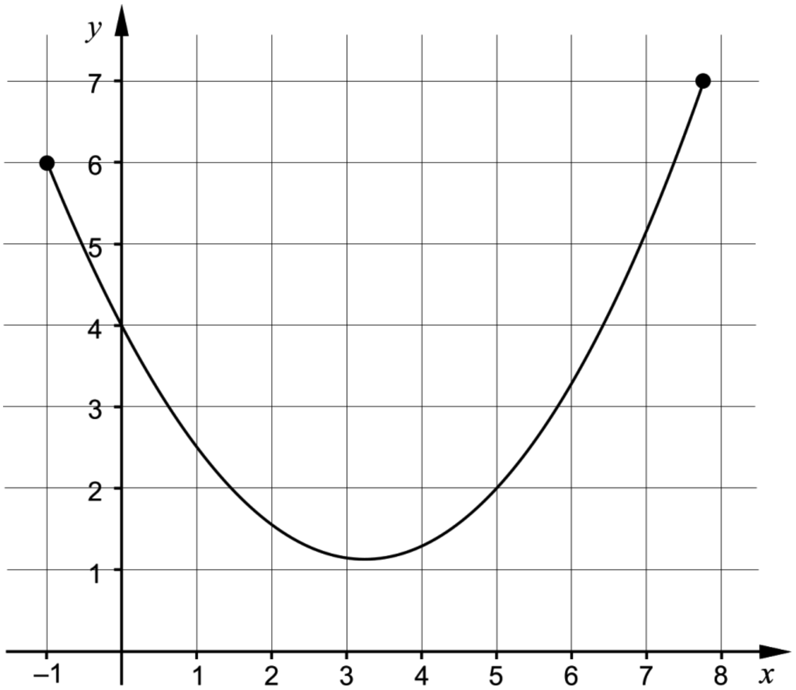
Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. För vilket värde på x är uttrycket $\dfrac{2x}{x+4}$ inte definierat?

_______________________ (1/0/0)

2. Beräkna det exakta värdet av $\int_0^2 x^2 \mathrm{d}x$ _______________________ (1/0/0)

3. Figuren visar grafen till en funktion som är definierad i ett slutet intervall.



Rita i figuren

a) en tangent som har lutningen 1. Märk tangenten med bokstaven T. (1/0/0)

b) en sekant som har lutningen 1. Märk sekanten med bokstaven S. (1/0/0)

4. Bestäm $f'(x)$ om

a) $f(x) = 5x^3 - 8x^2 + 10$ $f'(x) =$ ______________________ (1/0/0)

b) $f(x) = \dfrac{3x + e^{-x}}{2}$ $f'(x) =$ ______________________ (0/1/0)

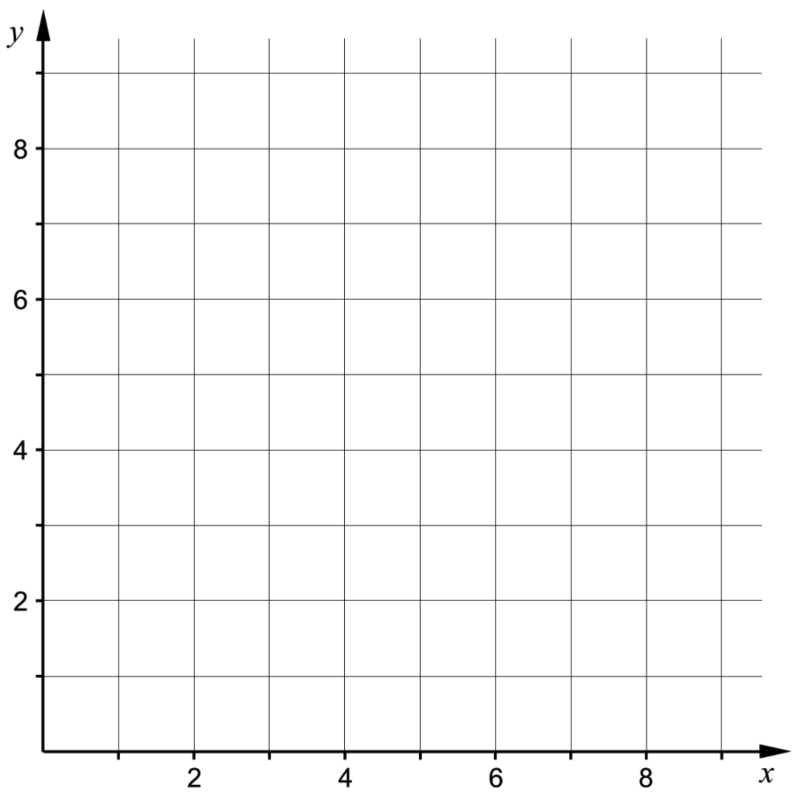
c) $f(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $f'(x) =$ ______________________ (0/1/0)

5. Bestäm det exakta värdet av

a) $\sin 90° + \sin 150°$ ______________________ (1/0/0)

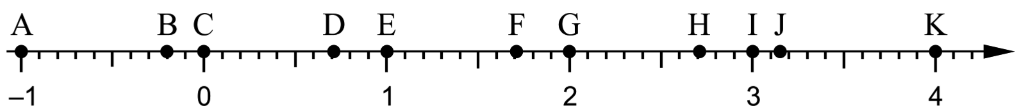
b) $\cos 240°$ ______________________ (0/1/0)

6. Funktionen f är en *diskret* funktion.
Det gäller att $f(x) = x^2$ för $x = 1,\ 2$ och 3
Rita grafen till funktionen f i koordinatsystemet.



(1/0/0)

7. På tallinjen är punkterna A – K markerade.

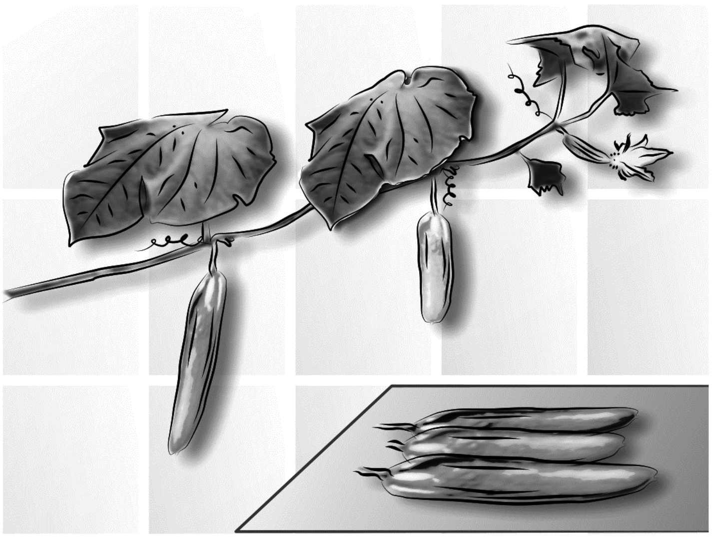


Bestäm vilken av punkterna A – K som motsvarar värdet av

a) $\ln e^2$ ____________________ (1/0/0)

b) $e - \ln 1$ ____________________ (0/1/0)

8. En gurkodlare har undersökt hur vikten hos en växande gurka ökar med tiden. Hon redovisar resultatet som en funktion $y = V(t)$, där $V(t)$ är gurkans vikt i hg och t är tiden i veckor efter mätningens början.



Vad får hon veta genom att bestämma $V'(3)$?
Välj ett av alternativen A – E.

A. Den vikt i hg som gurkan har vid tiden 3 veckor.

B. Gurkans viktökning i hg under 3 veckor.

C. Gurkans genomsnittliga viktökning i hg/vecka under 3 veckor.

D. Den tid det tar för gurkans vikt att öka till 3 hg.

E. Gurkans viktökning i hg/vecka vid tiden 3 veckor.

____________________ (0/1/0)

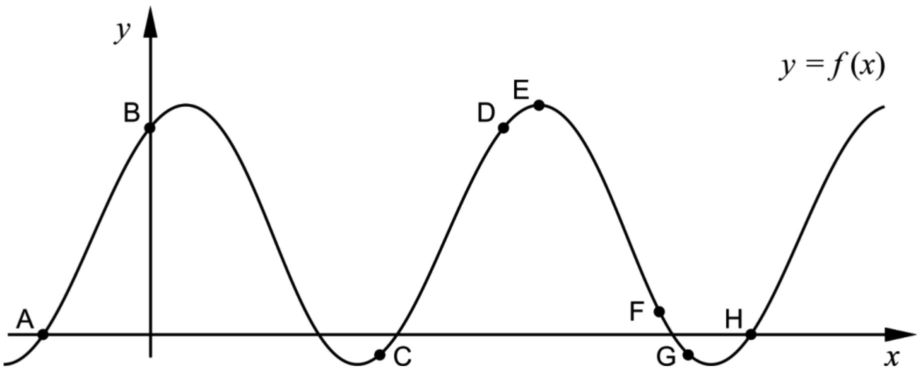
9. Förenkla uttrycken så långt som möjligt.

a) $\dfrac{3x+15}{x+5}$ _______________________ (1/0/0)

b) $\dfrac{x^2-6x+9}{2x^2-18}$ _______________________ (0/1/0)

c) $\dfrac{(x-1)^{13}+(x-1)^{12}}{x}$ _______________________ (0/0/1)

10. Figuren visar grafen till en funktion f. På grafen är punkterna A – H markerade.



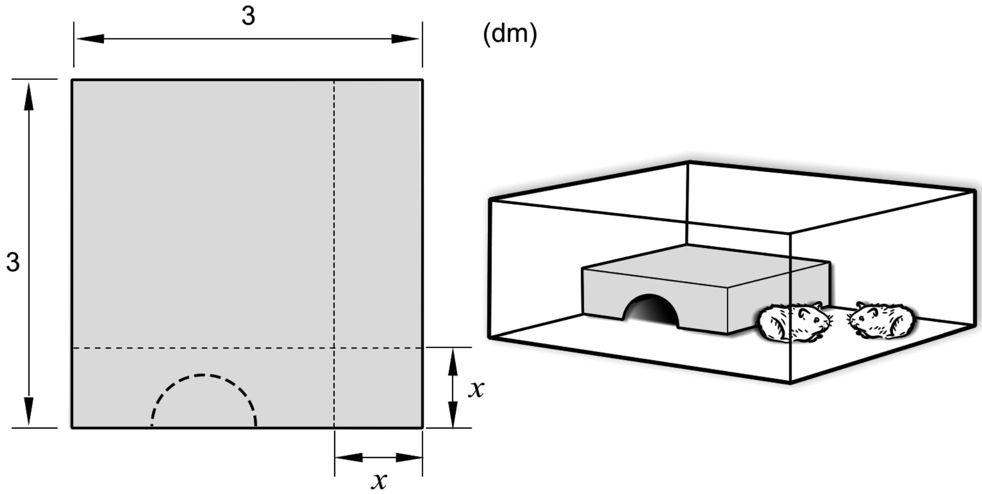
a) I en av punkterna A – H är $f'(x) > 0$ och $f(x) < 0$
Ange denna punkt. _______________________ (0/1/0)

b) I några av punkterna A – H är $f''(x) < 0$
Ange dessa punkter. _______________________ (0/0/1)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

11. En cirkel har ekvationen $(x-3)^2+(y-2)^2=64$
Undersök om punkten $(10,6)$ ligger på cirkeln. (2/0/0)

12. János har en kvadratisk plåt som han tänker använda för att bygga ett bo åt sina hamstrar. Han tänker skära bort en kvadratisk bit från ett av plåtens hörn och sedan vika plåten till ett bo, se figur.

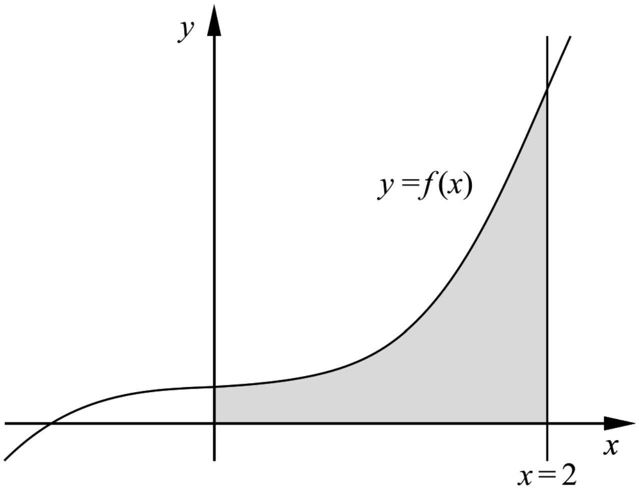


János antar att den kvadratiska biten har sidan x dm. Sedan bestämmer han boets volym V dm^3 som funktion av sidan x dm:

$V(x)=x^3-6x^2+9x$

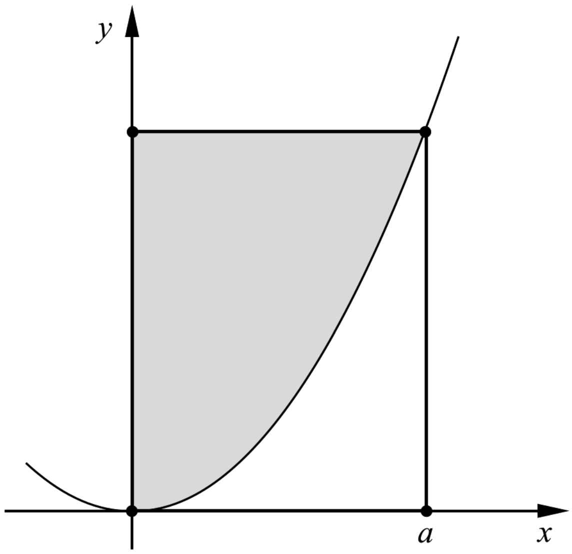
Använd derivata för att beräkna x så att boet får så stor volym som möjligt. (3/1/0)

13. Beräkna arean av området som begränsas av linjen $x = 2$, grafen till $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{4}$ och de positiva koordinataxlarna. (0/2/0)



14. Arkimedes var en grekisk matematiker och filosof som levde för ungefär 2300 år sedan. Han studerade bland annat parabler.

Figuren visar en parabel och en rektangel i ett koordinatsystem. Rektangeln har hörn i origo, på parabeln och på de positiva koordinataxlarna. Parabeln delar rektangeln i ett grått område ovanför parabeln och ett vitt område under parabeln. Se figur.



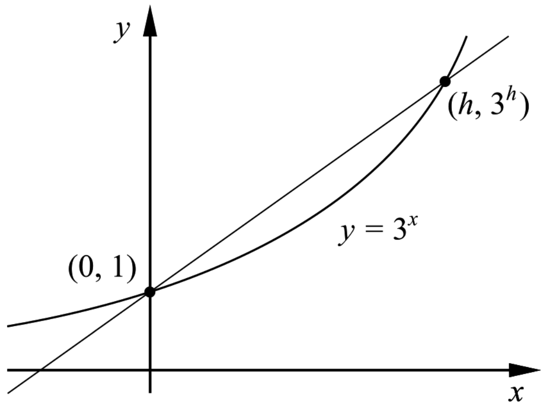
Arkimedes påstod att arean av det grå området är dubbelt så stor som arean av det vita området.

Utgå från att parabeln beskrivs med funktionen $y = kx^2$ där k är en positiv konstant och att hörnet på positiva x-axeln ligger i punkten där $x = a$.

Bevisa att Arkimedes påstående gäller för alla sådana parabler. (0/3/0)

15. Bestäm alla värden på a så att uttrycket $\dfrac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3}$ blir möjligt att förenkla. (0/0/2)

16. Figuren visar grafen till $y = 3^x$ och en rät linje som skär grafen i punkterna $(0,\ 1)$ och $(h,\ 3^h)$.



Bestäm $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3^h - 1}{h}$ och svara exakt. (0/0/2)

Delprov D	Uppgift 17-24. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 65 poäng varav 23 E-, 23 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 26 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 34 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 44 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 53 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

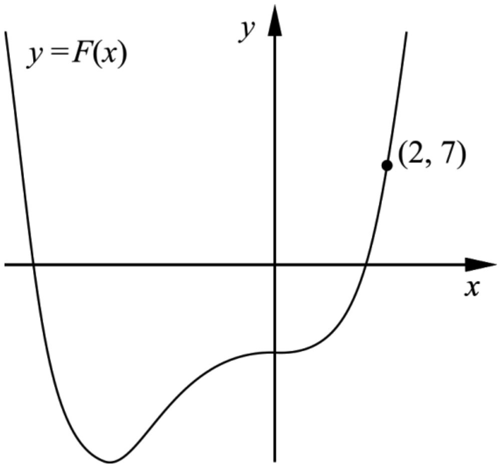
Namn: ____

Födelsedatum: ____

Gymnasieprogram/Komvux: _______________________________

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

17. För funktionen f gäller att $f(x) = x^3 + 3x^2$
F är en primitiv funktion till f. Grafen till F går genom punkten $(2,\ 7)$.
Se figur.



Bestäm den primitiva funktionen F. (2/0/0)

18. Hugo löser ekvationen $\left| x+2 \right| + 0,5x = 5$ och får lösningen $x = 2$
Kompisen Lisa påstår att även $x = -12$ är en lösning till ekvationen.

Har Lisa rätt? Motivera ditt svar. (1/0/0)

19. Temperaturen hos vattnet i en flaska som ställs in i ett kylskåp kan beskrivas med modellen $T(x) = 17\mathrm{e}^{-0,693x} + 5$
där $T(x)$ är vattnets temperatur i °C och x är tiden i timmar efter att flaskan ställdes in i kylskåpet.

a) Bestäm vattnets temperatur då flaskan ställs in i kylskåpet. (1/0/0)

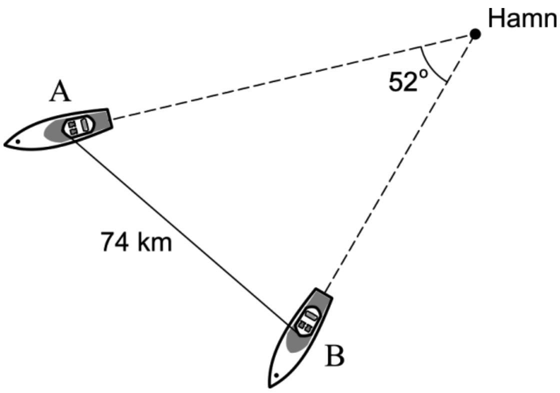
b) Bestäm efter hur lång tid vattnets temperatur är $10\,°\mathrm{C}$. (2/0/0)

c) Bestäm hur snabbt vattnets temperatur sjunker två timmar efter att flaskan ställdes in i kylskåpet. (0/2/0)

d) Enligt modellen kommer vattnets temperatur med tiden att närma sig en undre gräns. Bestäm denna undre gräns med hjälp av modellen. (0/2/0)

20. Grafen till $f(x) = x^4 - 4x$ har en tangent i punkten P.
Tangenten har lutningen $-17,5$
Bestäm x-koordinaten för punkten P. (0/2/0)

21. Två båtar lämnar en hamn vid samma tidpunkt. Båda båtarna håller konstant hastighet. Båt A har hastigheten 50 km/h och båt B har hastigheten 36 km/h. Båtarna håller rak kurs så att vinkeln mellan deras färdriktningar alltid är $52°$.

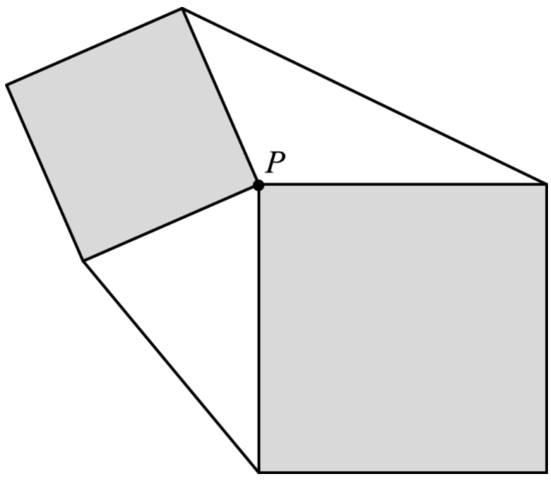


Båtarna står i radiokontakt med varandra. När avståndet mellan dem är 74 km bryts kontakten. Anta att det tar t timmar innan kontakten bryts.
Beräkna tiden t. (0/3/0)

22. Två olika stora kvadrater placeras enligt följande villkor:

- Kvadraterna ska ha var sitt hörn i samma punkt P.
- Kvadraterna ska inte ha några andra gemensamma punkter.

Mellan kvadraternas hörn dras två linjer så att två trianglar bildas utanför kvadraterna. Figuren nedan visar *ett* exempel på hur det kan se ut.



Bevisa att den ena triangeln alltid har lika stor area som den andra triangeln. (0/0/3)

23. Bakterien *Clostridium perfringens* kan orsaka allvarlig matförgiftning. Om mat som innehåller denna bakterie får svalna i rumstemperatur ökar antalet bakterier. Därför bör man alltid snabbt kyla ner maten efter tillagning. Det krävs ungefär 100 000 bakterier per gram mat för att en person ska bli matförgiftad.

Anta att det direkt efter tillagningen finns 100 bakterier per gram i en bit kokt lax. Den kokta laxen får svalna i rumstemperatur. Bakteriernas antal ökar med hastigheten $5,73e^{0,0573 \cdot t}$ bakterier per gram per minut vid tidpunkten t minuter.

Hur lång tid tar det innan det finns så många bakterier per gram i laxen att en person som äter av den riskerar att bli matförgiftad? (0/0/4)

24. Sara säljer blåbär på torget. Hon har upptäckt att varje gång hon höjer priset med 1 kr/kg minskar mängden blåbär som hon säljer per dag med 2 %. Om hon sätter priset till 40 kr/kg får hon sälja 30 kg per dag.

a) Bestäm dagsinkomsten D kr som funktion av prishöjningen x kr/kg, där $0 \leq x \leq 60$ *Endast svar krävs* (0/0/2)

b) Utgå från funktionsuttrycket i a)-uppgiften och rita grafen. Bestäm med hjälp av grafen vilket kilopris som ger den största dagsinkomsten. (0/0/1)

Till eleven - Information inför det muntliga delprovet

Du kommer att få en uppgift som du ska lösa skriftligt och sedan ska du presentera din lösning muntligt. Om du behöver får du ta hjälp av dina klasskamrater, din lärare och ditt läromedel när du löser uppgiften. Din muntliga redovisning börjar med att du presenterar vad uppgiften handlar om och sedan får du beskriva och förklara din lösning. Du ska redovisa alla steg i din lösning. Däremot, om du har gjort samma beräkning flera gånger (till exempel i en värdetabell) så kan det räcka med att du redovisar några av beräkningarna. Din redovisning är tänkt att ta maximalt 5 minuter och ska göras för en mindre grupp klasskamrater och din lärare.

Den uppgift som du får ska i huvudsak lösas för hand, algebraiskt. Det kan hända att du behöver en miniräknare för att göra en del beräkningar men du ska inte hänvisa till grafritande och/eller symbolhanterande funktioner på räknaren (om du har en sådan typ av räknare) när du redovisar din lösning.

Vid bedömningen av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
Din redovisning ska innehålla de delar som behövs för att dina tankar ska gå att följa och förstå. Det du säger bör komma i lämplig ordning och inte innehålla någonting onödigt. Den som lyssnar ska förstå hur beräkningar, beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger ihop med varandra.

Hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
Din redovisning bör innehålla både beskrivningar och förklaringar. Man kan enkelt säga att en beskrivning svarar på frågan ”*Hur?*” och en förklaring svarar på frågan ”*Varför?*”. Du beskriver något när du till exempel berättar *hur* du har gjort en beräkning. Du förklarar något när du motiverar *varför* du till exempel kunde använda en viss formel.

Hur väl du använder den matematiska terminologin
När du redovisar bör du använda ett språk som innehåller matematiska termer, uttryckssätt och symboler som är lämpliga utifrån den uppgift du har löst.

Matematiska termer är ord som till exempel ”exponent”, ”funktion” och ”graf”.

Ett exempel på ett matematiskt uttryckssätt är att x^2 utläses ”x upphöjt till 2” eller ”x i kvadrat”.
Några exempel på matematiska symboler är π och $f(x)$, vilka utläses ”pi” och ”f av x”.

Uppgift 1.

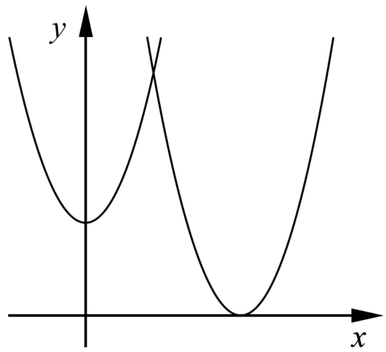
Namn:________________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Ett område begränsas av de positiva koordinataxlarna, kurvan $y = x^2 + 3$ och kurvan $y = (x-5)^2$

Beräkna områdets area.



Uppgift 2.

Namn:________________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

För funktionen f gäller att $f(x) = 2x^4 - 4x^3$ där $-1 \leq x \leq 2$

a) Använd derivata för att rita grafen till funktionen.

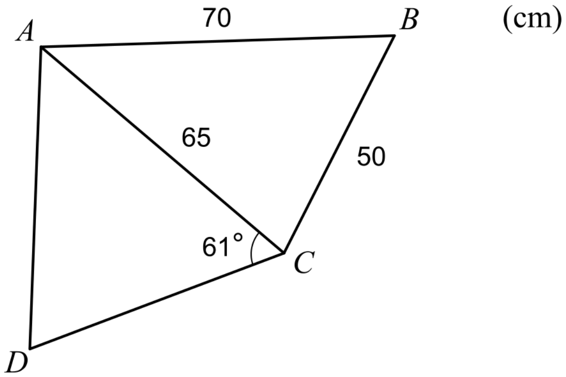
b) Bestäm funktionens största och minsta värde.

Uppgift 3.

Namn:________________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Figuren visar en fyrhörning *ABCD*. Bestäm sidan *CD* så att arean av triangeln *ACD* blir lika stor som arean av triangeln *ABC*.



Uppgift 4.

Namn:__________________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

För funktionen f gäller att $f(x) = x^2 + x - 20$
I den punkt där kurvan skär positiva x-axeln har kurvan en tangent.
Beräkna var denna tangent skär y-axeln.

Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	**E**	**C**	**A**	**Max**
Fullständighet, relevans och struktur Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.	Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig. (1/0/0)		Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår. Redovisningen är välstrukturerad. (1/0/1)	(1/0/1)
Beskrivningar och förklaringar Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.	Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar. Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad. (1/0/0)		Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar. (1/0/1)	(1/0/1)
Matematisk terminologi Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen. (1/0/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen. (1/1/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen. (1/1/1)	(1/1/1)
Summa				(3/1/3)

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning 3
Bedömningsanvisningar 3
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga 4
Provsammanställning – Kunskapskrav 5
Provsammanställning – Centralt innehåll 6
Kravgränser 7
Resultatsammanställning 7
Bedömningsformulär 8
Bedömningsanvisningar 9
Delprov B 9
Delprov C 11
Delprov D 12
Bedömda elevlösningar 15
Uppgift 3 15
Uppgift 11 16
Uppgift 12 17
Uppgift 14 18
Uppgift 15 19
Uppgift 18 20
Uppgift 19d 21
Uppgift 21 22
Uppgift 22 23
Uppgift 23 25
Uppgift 24a 28
Ur ämnesplanen för matematik 29
Kunskapskrav Matematik kurs 3b och 3c 30
Centralt innehåll Matematik kurs 3c 31

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. …	$+1\ E_P$
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	$+1\ E_P$

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … $1\ E_R$	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … $1\ E_R$ och $1\ C_R$	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … $1\ E_R$, $1\ C_R$ och $1\ A_R$

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga
Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för provbetyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\pm$, $\sqrt{\ }$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, x, y, $(\ )$, $[\ ]$, $\int \mathrm{d}x$, bråkstreck, index, lim, VL, HL, symbol för vinkel, gradtecken
Termer	t.ex. absolutbelopp, cirkel, enhetscirkel, polynom, rationellt uttryck, kontinuerlig/diskret funktion, rät linje, andragrads-/polynom-/potens-/ exponentialfunktion, funktionsvärde, definitions-/värdemängd, punkt, intervall, område, koordinat, koordinatsystem, graf, kurva, skärningspunkt, nollställe, symmetrilinje, lutning, riktningskoefficient, ändpunkt, sekant, tangent, ändringskvot, förändringshastighet, gränsvärde, derivata, andraderivata, teckenschema, växande/avtagande, extrempunkt, maximi-/ minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, primitiv funktion, integral, talet e, naturlig logaritm
Hänvisningar	t.ex. till derivatans definition, räta linjens ekvation, tangentens ekvation, cirkelns ekvation, enhetscirkeln, areasatsen, cosinussatsen, sinussatsen, definitionen för sinus
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3c i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 19b_1 och 19b_2 den första respektive andra poängen i uppgift 19b.

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
A	M_1				1								
	M_2												1
	M_3				1								
	M_4												1
	M_5				1								
	M_6								1				
	M_7												1
B	1	1											
	2		1										
	3a	1											
	3b	1											
	4a		1										
	4b						1						
	4c						1						
	5a		1										
	5b					1							
	6	1											
	7a	1											
	7b					1							
	8					1							
	9a		1										
	9b						1						
	9c										1		
	10a					1							
	10b									1			
C	11_1				1								
	11_2				1								
	12_1		1										
	12_2		1										
	12_3		1										
	12_4								1				
	13_1						1						
	13_2						1						
	14_1								1				
	14_2								1				
	14_3								1				
	15_1											1	
	15_2											1	
	16_1									1			
	16_2										1		
D	17_1			1									
	17_2			1									
	18				1								
	19a			1									
	19b_1			1									
	19b_2			1									
	19c_1					1							
	19c_2					1							
	19d_1							1					
	19d_2							1					
	20_1							1					
	20_2							1					
	21_1							1					
	21_2							1					
	21_3								1				
	22_1												1
	22_2												1
	22_3												1
	23_1									1			
	23_2											1	
	23_3											1	
	23_4												1
	24a_1											1	
	24a_2											1	
	24b											1	
	Total	**5**	**7**	**5**	**6**	**6**	**5**	**6**	**6**	**3**	**2**	**7**	**7**
Σ	**65**	**23**				**23**				**19**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3c i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

Del-prov	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma3c																
					Aritmetik, algebra och geometri				Samband och förändring										Problem-lösning		
		E	C	A	A1	A3	A4	A5	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	P1	P3	P4
A		3	1	3																	
B	1	1	0	0	X																
	2	1	0	0													X	X			
	3a	1	0	0							X										
	3b	1	0	0							X										
	4a	1	0	0							X	X									
	4b	0	1	0							X	X									
	4c	0	1	0							X	X									
	5a	1	0	0			X														
	5b	0	1	0			X														
	6	1	0	0					X												
	7a	1	0	0									X								
	7b	0	1	0									X								
	8	0	1	0							X										
	9a	1	0	0	X																
	9b	0	1	0	X																
	9c	0	0	1	X																
	10a	0	1	0							X			X	X	X					
	10b	0	0	1							X			X	X	X					
C	11	2	0	0			X														
	12	3	1	0							X	X		X	X	X					
	13	0	2	0													X	X			
	14	0	3	0													X	X			
	15	0	0	2	X														X		
	16	0	0	2					X		X	X	X	X							
D	17	2	0	0													X		X		
	18	1	0	0		X															
	19a	1	0	0									X								
	19b	2	0	0									X						X	X	
	19c	0	2	0							X	X	X	X		X					
	19d	0	2	0					X				X						X	X	
	20	0	2	0						X	X	X		X		X			X		
	21	0	3	0				X											X	X	
	22	0	0	3			X	X													
	23	0	0	4							X		X				X	X	X	X	
	24a	0	0	2	X														X	X	
	24b	0	0	1							X			X	X				X	X	
Total		23	23	19																	

Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 65 poäng varav 23 E-, 23 C- och 19 A-poäng. Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla fyra delprov, det vill säga Delprov A, B, C och D.

Kravgräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 26 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 34 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 44 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 53 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Bedömningsformulär

Elev:____________________________ Klass:________________ Provbetyg: ____________

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
A	M_1												
	M_2												
	M_3												
	M_4												
	M_5												
	M_6												
	M_7												
B	1												
	2												
	3a												
	3b												
	4a												
	4b												
	4c												
	5a												
	5b												
	6												
	7a												
	7b												
	8												
	9a												
	9b												
	9c												
	10a												
	10b												
C	11_1												
	11_2												
	12_1												
	12_2												
	12_3												
	12_4												
	13_1												
	13_2												
	14_1												
	14_2												
	14_3												
	15_1												
	15_2												
	16_1												
	16_2												

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	17_1												
	17_2												
	18												
	19a												
	19b_1												
	19b_2												
	19c_1												
	19c_2												
	19d_1												
	19d_2												
	20_1												
	20_2												
	21_1												
	21_2												
	21_3												
	22_1												
	22_2												
	22_3												
	23_1												
	23_2												
	23_3												
	23_4												
	24a_1												
	24a_2												
	24b												
	Total												
Σ													

	Total	**5**	**7**	**5**	**6**	**6**	**5**	**6**	**6**	**3**	**2**	**7**	**7**
Σ	**65**	**23**				**23**				**19**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Delprov B

1. **Max 1/0/0**

Korrekt svar (-4) — $+1\ E_B$

2. **Max 1/0/0**

Korrekt svar $\left(\frac{8}{3}\right)$ — $+1\ E_P$

3. **Max 2/0/0**

a) Godtagbart ritad tangent — $+1\ E_B$

b) Godtagbart ritad sekant som skär grafen i två punkter — $+1\ E_B$

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

4. **Max 1/2/0**

a) Korrekt svar ($f'(x) = 15x^2 - 16x$) — $+1\ E_P$

b) Korrekt svar $\left(f'(x) = \frac{3 - e^{-x}}{2} \right)$ — $+1\ C_P$

c) Korrekt svar ($f'(x) = x^{-1,5}$) — $+1\ C_P$

5. **Max 1/1/0**

a) Korrekt svar ($1,5$) — $+1\ E_P$

b) Korrekt svar ($-0,5$) — $+1\ C_B$

6.		**Max 1/0/0**
	Godtagbart ritad graf (Markering av punkterna $(1, 1)$, $(2, 4)$ och $(3, 9)$)	+1 E_B
7.		**Max 1/1/0**
a)	Korrekt svar (G)	+1 E_B
b)	Korrekt svar (H)	+1 C_B
8.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar (Alternativ E)	+1 C_B
9.		**Max 1/1/1**
a)	Korrekt svar (3)	+1 E_P
b)	Korrekt svar $\left(\frac{x-3}{2(x+3)}\right)$	+1 C_P
c)	Korrekt svar ($(x-1)^{12}$)	+1 A_P
10.		**Max 0/1/1**
a)	Korrekt svar (C)	+1 C_B
b)	Korrekt svar (B, D och E)	+1 A_B

Delprov C

11. **Max 2/0/0**

Godtagbar inledning till resonemang, t.ex. sätter $x = 10$ och $y = 6$ i cirkelns ekvation +1 E_R

med i övrigt godtagbart slutfört resonemang med slutsatsen att punkten inte ligger på cirkeln +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

12. **Max 3/1/0**

Godtagbar ansats, deriverar och tecknar ekvationen $3x^2 - 12x + 9 = 0$ +1 E_P

med korrekt bestämning av derivatans nollställen, $x_1 = 1$ och $x_2 = 3$ +1 E_P

med godtagbar verifiering, t.ex. verifiering av maximum då $x_1 = 1$ och uteslutning av nollstället $x_2 = 3$ med korrekt svar ($x = 1$) +1 E_P

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

13. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion, $\frac{x^4}{16} + \frac{x}{4}$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (1,5 a.e.) +1 C_P

Kommentar: Svar med utelämnad eller felaktig enhet godtas.

14. **Max 0/3/0**

Godtagbar generell ansats, där två relevanta areor beräknas, t.ex.
$\int_0^a kx^2 \mathrm{d}x = \frac{ka^3}{3}$ och $a \cdot ka^2 = ka^3$ +1 C_R

med godtagbart slutfört bevis +1 C_R

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

15. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, skriver om nämnaren som $(x-1)(x+3)$ och inser att en av faktorerna $(x-1)$ eller $(x+3)$ ska finnas i täljaren $x^2-ax-12$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a_1=-11$ och $a_2=1$) +1 A_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

16. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t.ex. visar insikt om att $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3^h-1}{h}=y'(0)$ +1 A_B

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($\ln 3$) +1 A_P

Delprov D

17. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer ett allmänt uttryck för den primitiva funktionen, $F(x)=0,25x^4+x^3+C$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($F(x)=0,25x^4+x^3-5$) +1 E_{PL}

18. **Max 1/0/0**

Godtagbart enkelt resonemang, där det framgår att $|-12+2|+0,5\cdot(-12)=4,$ med slutsatsen att Lisa har fel +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

19. **Max 3/4/0**

a) Godtagbar lösning med korrekt svar ($22\,°\mathrm{C}$) +1 E_M

b) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $17\mathrm{e}^{-0,693x}+5=10$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($1,8\ \mathrm{h}$) +1 E_M

c) Godtagbar ansats, visar insikt om att funktionen ska deriveras +1 C_B

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar inklusive korrekt enhet ($2,9\,°\mathrm{C/h}$) +1 C_B

Kommentar: Svaret $-2,9\,°\mathrm{C/h}$ bedöms som godtagbart.

d) Godtagbar ansats, t.ex. ansätter några värden på x i funktionsuttrycket +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($5\ °\mathrm{C}$) +1 C_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

20. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. deriverar och tecknar ekvationen $4x^3-4=-17,5$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($-1,5$) +1 C_{PL}

21. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, tecknar en användbar ekvation med hjälp av cosinussatsen +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($1,9\ \mathrm{h}$) +1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

22. **Max 0/0/3**

Godtagbar generell ansats, ansätter två sidor med olika längder och lämpliga vinklar samt använder areasatsen i två trianglar +1 A_R

med i övrigt korrekt slutfört bevis inklusive hänvisning till sambandet $\sin v = \sin(180° - v)$ +1 A_R

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

23. **Max 0/0/4**

Godtagbar ansats, t.ex. visar insikt om att $\int 5{,}73e^{0{,}0573 \cdot t} dt$ kan användas +1 A_B

med godtagbar fortsättning, tar hänsyn till att antalet bakterier är 100 då $t = 0$, t.ex. genom att teckna ekvationen $100 + \int_0^x 5{,}73e^{0{,}0573 \cdot t}\, dt = 100000$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (120 min) +1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

Kommentar: Observera att vissa felaktiga lösningar,

t.ex. $\int_0^x 5{,}73e^{0{,}0573 \cdot t}\, dt = 100000$ också ger svaret 120 minuter.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

24. **Max 0/0/3**

a) Godtagbar ansats, funktionsuttrycket innehåller faktorn $30 \cdot 0{,}98^x$ +1 A_M

med korrekt svar ($D(x) = (40 + x)(30 \cdot 0{,}98^x)$) +1 A_M

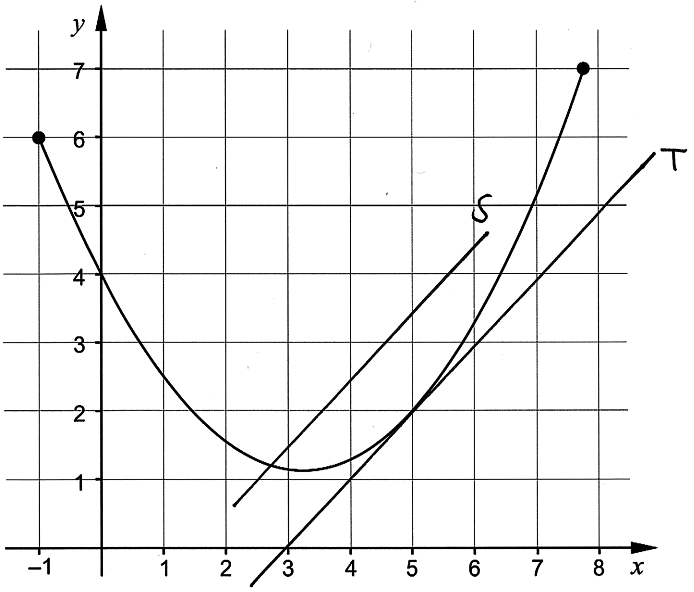
b) Godtagbar grafisk lösning, där det korrekta funktionsuttrycket $D(x) = (40 + x)(30 \cdot 0{,}98^x)$ används, med godtagbart svar (49,50 kr/kg) +1 A_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Bedömda elevlösningar

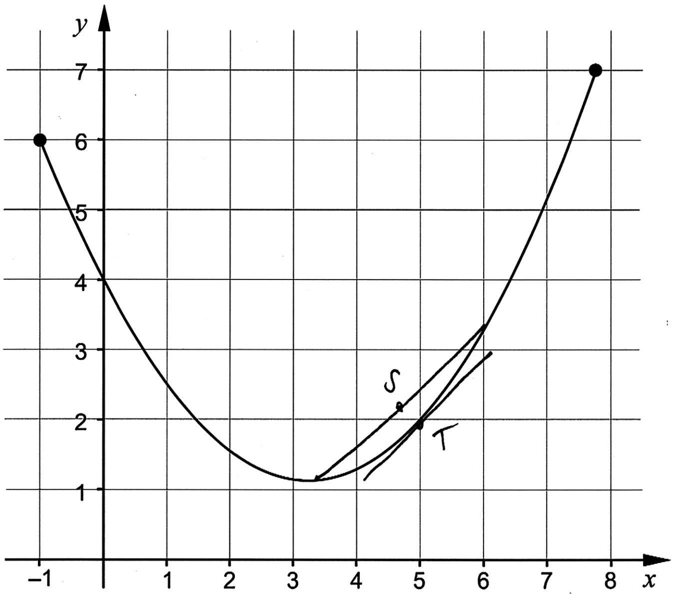
Uppgift 3

Elevlösning 1 (1 E_B)



Kommentar: a) Tangenten är godtagbart ritad, vilket ger en begreppspoäng på E-nivå.
b) Sekanten uppfyller inte kraven för en begreppspoäng på E-nivå eftersom den inte skär grafen i två punkter.

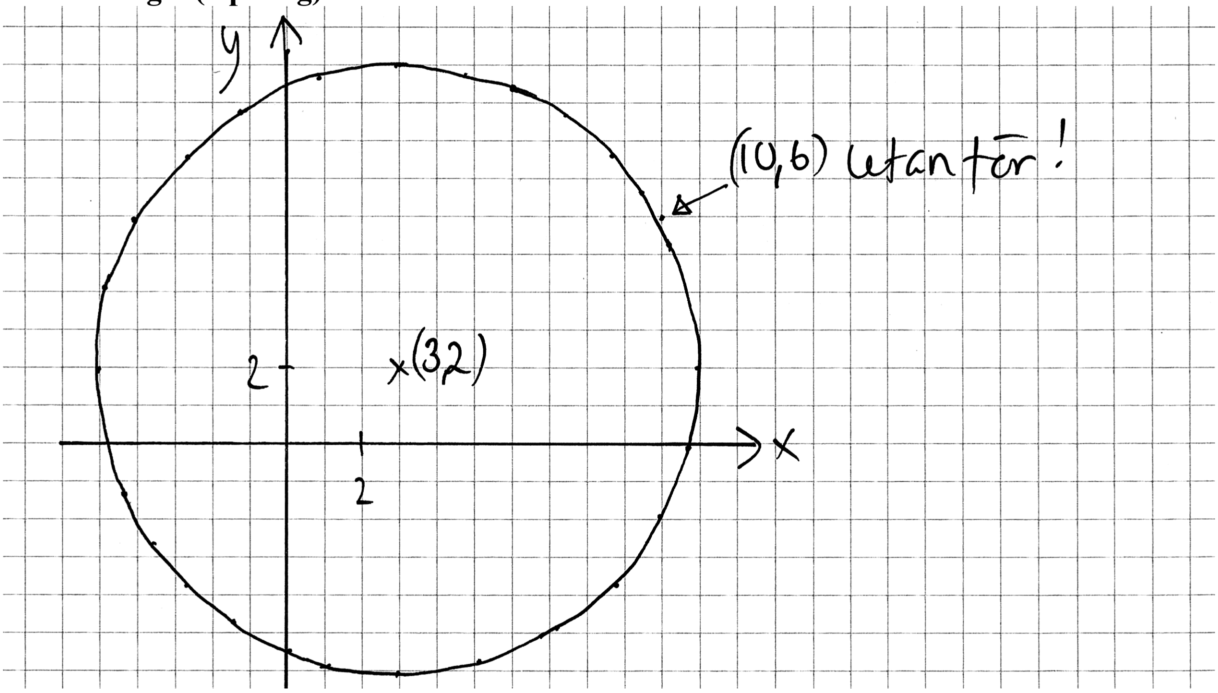
Elevlösning 2 (2 E_B)



Kommentar: Tangenten och framförallt sekanten borde ha varit längre och lutningen är inte riktigt 1. Trots detta bedöms lösningen nätt och jämnt ge två begreppspoäng på E-nivå.

Uppgift 11

Elevlösning 1 (0 poäng)



Kommentar: Elevlösningen visar en noggrant ritad figur, men en figur anses inte vara tillräcklig för att avgöra om punkten ligger på cirkeln eller inte. Lösningen ges 0 poäng.

Elevlösning 2 (1 E_R)

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 64$$
$$(10-3)^2 + (6-2)^2 = 64$$
$$(100-9) + (36-4) = 64$$
$$91 + 32 \neq 64$$

Nej, den ligger inte på cirkeln!

Kommentar: Lösningen visar en godtagbar ansats där $x = 10$ och $y = 6$ ansätts i ekvationen men sedan följer ett räknefel. Lösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösning 3 (2 E_R)

$$(10-3)^2 + (6-2)^2 = 64 \Rightarrow$$
$$7^2 + 4^2 = 64 \Rightarrow$$
$$49 + 16 = 65 = 64 \quad \text{Falskt}$$

Nej, det gör den inte

Kommentar: Lösningen visar ett godtagbart enkelt resonemang trots formella brister. Sammantaget ges lösningen nätt och jämnt två resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 12

Elevlösning 1 (2 E_P och $1C_K$)

$V(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

Vmax finns där $V'(x) = 0$

$V'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ pq-formeln ger vidare att

$\Rightarrow x = -\left(-\frac{4}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3}$

$= 2 \pm \sqrt{1}$

$\Rightarrow x_1 = 2 + 1 = 3$ dm

$x_2 = 2 - 1 = 1$ dm

X_1 ger att sidan $x = 3$ dm vilket är orimligt då detta är den kvadratiska plåtens sida.

Därav finns Vmax i $x = 1$. Sidan ska vara 1 dm för att boet ska bli så stort som möjligt.

Svar: 1 dm

Kommentar: I elevlösningen motiveras varför $x = 3$ dm är orimligt men verifiering av att $x = 1$ dm motsvarar ett maximum saknas, vilket gör att kraven för tredje procedurpoängen på E-nivå inte är uppfyllda. När det gäller kommunikation är uppgiften i det närmaste behandlad i sin helhet och redovisningen är mycket lätt att följa och förstå samt symboler används med god anpassning till syfte och situation. Därmed anses kraven för kommunikationspoängen på C-nivå vara uppfyllda. Sammantaget ges elevlösningen två procedurpoäng på E-nivå och kommunikationspoängen på C-nivå.

Elevlösning 2 (3 E_P och 1 C_K)

Sökes: Största möjliga volym

Givet: Sidan är 3 dm

$V(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

Lösning: $V'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$V'(x) = 0$ ger $3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$

$(x_1 = 3)$ $\quad x_2 = 1$

$V''(x) = 6x - 12$

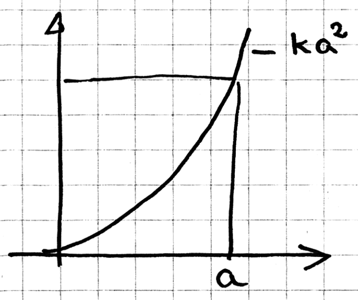
$V''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6$ $\quad V(1)$ max

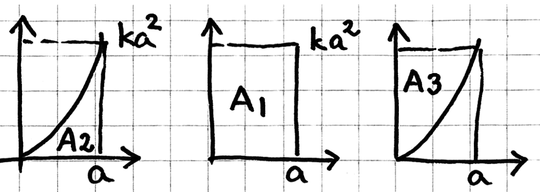
Svar $x = 1$

Kommentar: Uppgiften är löst i sin helhet inklusive uteslutning av $x = 3$ och verifiering av maximum. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad och möjlig att följa och förstå trots att motiveringen till varför $x = 1$ ger ett maximum är ofullständig. Elevlösningen ges tre procedurpoäng på E-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå

Uppgift 14

Elevlösning 1 (1 C_R och 1 C_K)





$A_1 = a \cdot ka^2 = ka^3$

$A_2 = \int_0^a kx^2\,dx = \left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^a = \frac{ka^3}{3}$

Om $A_2 + A_3$ ska vara lika med A_1 så

måste $A_3 = \frac{2ka^3}{3}$

Kommentar: Relevanta areor beräknas korrekt men bevisföringen är inte helt slutförd eftersom en slutsats av typen ”dvs $A_3 = 2A_2$” saknas. Även om beviset inte är helt fullständigt så är lösningen välstrukturerad och lätt att följa och förstå. Matematiska symboler används korrekt och figurerna förtydligar lösningen. Elevlösningen ges en resonemangs- och en kommunika-tionspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C_R och 1 C_K)

$$A_{uit} = \int_0^a (kx^2)\,dx = \left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^a = \frac{ka^3}{3}$$

$$y = ka^2$$

$$A_{rek} = a \cdot ka^2 = ka^3$$

$$A_{grå} = ka^3 - \frac{ka^3}{3} = \frac{2ka^3}{3}$$

$$A_{grå} = 2 \cdot A_{uit}$$

$$\frac{2ka^3}{3} = 2 \cdot \frac{ka^3}{3} \qquad \text{V.S.B.}$$

Kommentar: Elevlösningen visar ett godtagbart bevis. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå. Visserligen saknas figur men detta kompenseras av användningen av index. Elevlösningen ges två resonemangspoäng och en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 15

Elevlösning 1 (0 poäng)

$$\frac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x^2 - ax - 12}{(x-1)(x+3)} =$$

$$x = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 3}$$

$$x_1 = 1 \text{ och } x_2 = -3$$

Kommentar: Nämnaren faktoriseras korrekt men det framgår inte att faktorerna även ska finnas i täljaren för att förkortning ska vara möjlig. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (1 A_{PL})

$$\frac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3}$$

Man kan inte använda några kvadreringsregler eftersom det är – framför 12 och 3.

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

För att det ska bli 12 måste man ha med 4 och 3 i parenteserna.

$$(x+3)(x-4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12$$

Detta gör att om $a = 1$ kan man förenkla uttrycket.

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x-4}{x-1} \qquad \text{Svar: } a = 1$$

Kommentar: I elevlösningen faktoriseras nämnaren och det ena värdet på a bestäms. Elevlösningen ges en problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 3 (2 A_{PL})

Förkortning möjlig

a_1

$$\frac{x^2-ax-12}{x^2+2x-3} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2-4x+3x-12}{x^2-x+3x-3} = \frac{x^2-x-12}{x^2+2x-3}$$

$$x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$$

$$\boxed{\text{svar } a_1 = 1 \quad a_2 = 11}$$

Förkortning möjlig

$$\frac{x^2-ax-12}{x^2+2x-3} = \frac{(x-1)(x+12)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2+12x-x-12}{x^2+2x-3} =$$

$$= \frac{x^2-11x-12}{x^2+2x-3} \quad a_2$$

Kommentar: Elevlösningen är korrekt förutom ett lapsusfel i sista ledet. Elevlösningen ges två problemlösningspoäng på A-nivå.

Uppgift 18

Elevlösning 1 (0 poäng)

LISA HAR FEL.

$$|x+2| + 0.5x = 5$$
$$(-12+2) + (-6) = 5$$
$$(-10) + (-6) = 5$$
$$10 - 6 = 4$$

Kommentar: Elevlösningen visar ett resonemang som inte bedöms som godtagbart eftersom parentes används istället för absolutbeloppstecken på andra och tredje raden. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (1 E_R)

$$|-12+2| + 0.5\cdot(-12) = 5$$
$$|-10| + (-6) = 5$$
$$10 - 6 = 4 \neq 5$$

Hon har fel!!!

Kommentar: Elevlösningen visar ett resonemang som på de två första raderna inte är formellt korrekt eftersom $VL \neq HL$. Elevlösningen bedöms nätt och jämnt uppfylla kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösning 3 (1 E_R)

Nej, eftersom $|-12+2| = 10$ och

$10 + 0{,}5\cdot(-12) = 10 - 6 = 4$

Kommentar: Elevlösningen visar ett något kortfattat resonemang som nätt och jämnt bedöms uppfylla kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 19d

Elevlösning 1 (0 poäng)

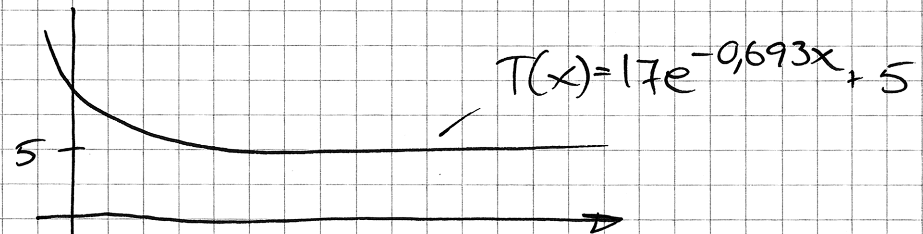
Vi säger att $x = 1000$

$T(1000) = 17e^{-0{,}693 \cdot 1000} + 5 = 5$ Svar $5°C$ (undre gräns)

Kommentar: I elevlösningen ansätts enbart ett värde på x vilket inte är tillräckligt för att dra slutsatsen att uttryckets värde *närmar sig* 5. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (2 C_M)

Temperaturen blir 5°C. Det kan vi se när vi ritar upp grafen m.hj.a. miniräknaren



Grafen sjunker inte under $y = 5$ utan stannar på $y = 5$
Vattnet kan alltså inte bli kallare än 5°C.

Kommentar: I elevlösningen används den matematiska modellens graf för att visa att den undre gränsen är $5°C$. Skalan på x-axeln framgår inte, grafen går inte genom $(0,22)$ och det är inte matematiskt korrekt att skriva att ”Grafen … stannar på $y = 5$”. Trots detta bedöms elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för två modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösning 3 (2 C_M)

$$\lim_{x \to \infty} \underbrace{17e^{-0{,}693x}} + 5 = 5$$

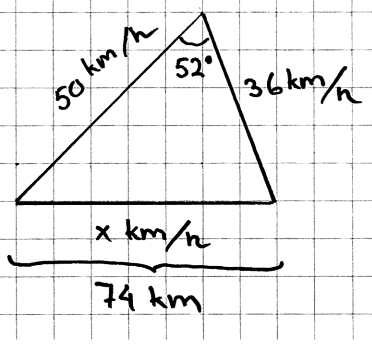
Detta kommer att gå mot noll när x går mot ~~**~~ oändligheten och kvar blir då 5.

SVAR: Undre gräns är 5°C

Kommentar: I elevlösningen används modellen för att visa att den undre gränsen för vattnets temperatur är $5°C$. Elevlösningen uppfyller kraven för två modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 21

Elevlösning 1 (1 C_{PL})

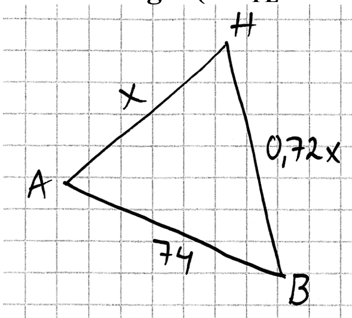


$x^2 = 36^2 + 50^2 - 2 \cdot 36 \cdot 50 \cdot \cos 52 \Rightarrow$

$x = 39{,}7444$ km/h

Kommentar: Elevlösningen visar en godtagbar ansats. Lösningen ges den första problemlösningspoängen på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C_{PL} och 1 C_K)



x är sträckan som båt A hinner köra

$\frac{36}{50} = 0{,}72$

cossats: $74^2 = (0{,}72 \cdot x)^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot (0{,}72x) \cos 52°$

Enligt solve $\Rightarrow$ $(x_1 = -94{,}9639)$ ej negativ sträcka

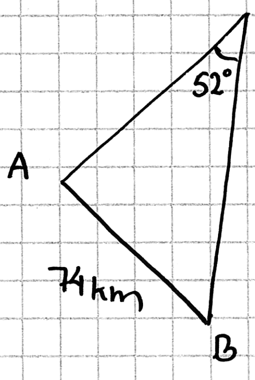
$x_2 = 94{,}9639$

HA = 94,9639 km = 95,0 km

tid $t = \frac{95{,}0}{50} = 1{,}9$ h SVAR: Efter 1,9 h

Kommentar: Uppgiften är löst i sin helhet och korrekt. När det gäller kommunikation förklaras inte kvoten 36/50 i inledningen, tidsberäkningen redovisas inte med formel och figuren saknar ”km”. Trots detta brister är elevlösningen möjlig att följa och förstå. Sammantaget ges elevlösningen två problemlösningspoäng samt nått och jämnt kommunikationspoängen på C-nivå.

Elevlösning 3 (2 C_{PL} och 1 C_K)



Om tiden är t blir sidorna 50t och 36t

Cosinussatsen:

$74^2 = 50t^2 + 36t^2 - 2 \cdot 50t \cdot 36t \cdot \cos 52$

$5476 = 2500t^2 + 1296t^2 - (3600 \cos 52)t^2$

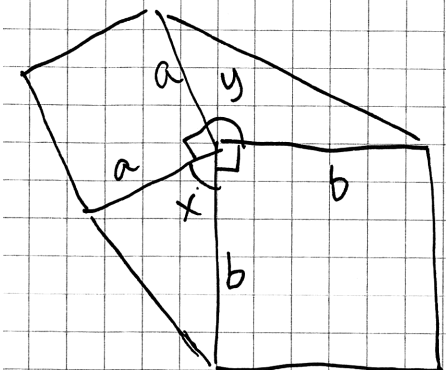
$5476 = 1579t^2$

$t = \sqrt{\frac{5476}{1579}}$ $t = 1{,}9$ Svar $t = 1{,}9h$

Kommentar: Uppgiften är löst i sin helhet och korrekt. När det gäller kommunikation saknas parenteser i ekvationen som baseras på cosinussatsen och gradtecken på något ställe samt formeln $s = v \cdot t$. I övrigt är lösningen välstrukturerad och möjlig att följa och förstå. Sammantaget ges elevlösningen två problemlösningspoäng samt nätt och jämnt kommunikationspoängen på C-nivå.

Uppgift 22

Elevlösning 1 (2 A_R)



$\angle y = 360 - 90 - 90 - x = 180 - x$

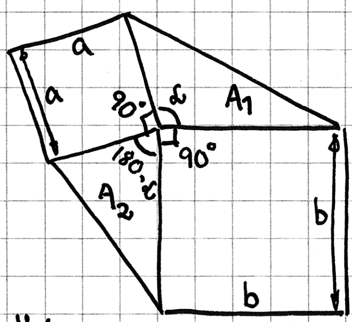
$\sin(180 - x) = \sin x$

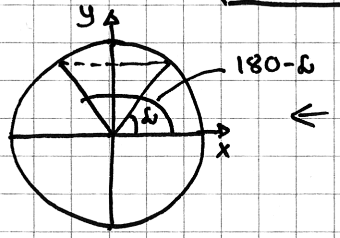
$A = \frac{ab \cdot \sin x}{2} = \frac{ab \sin(180-x)}{2}$

V.S.B

Kommentar: Elevlösningen är mycket kortfattad men innehåller det nödvändigaste för att beviset ska vara hållbart, t.ex. hänvisas till sambandet $\sin(180° - v) = \sin v$. Elevlösningen ges därmed nätt och jämnt två resonemangspoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation saknas hänvisning till areasatsen. Dessutom är kopplingen mellan figuren och de areor som tecknats på sista raden otydlig. Gradtecken saknas genomgående. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda.

Elevlösning 2 (2 A_R och 1 A_K)





← Enhets cirkeln

a = sida på kvadrat 1

b = sida på kvadrat 2

Areasatsen

$$A_1 = \frac{a \cdot b \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$A_2 = \frac{a \cdot b \cdot \sin(180-\alpha)}{2}$$

alltså vinkeln α och $(180-\alpha)$ har samma sinusvärde

$$\frac{ab\sin\alpha}{2} = \frac{ab\sin(180-\alpha)}{2} = A_1 = A_2$$

V.S.V

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet och är korrekt. När det gäller kommunikation saknas gradtecken på vissa ställen men lösningen är lätt att följa och förstå eftersom bevisets bärande delar förklaras och kopplingen mellan figur och areauttryck är tydlig. Elevlösningen ges två resonemangs- och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 23

Elevlösning 1 (1 A_B)

100 från början (per gram)

hastighet $5{,}73e^{0{,}0573t}$ bakt./min

$$\int_0^t 5{,}73e^{0{,}0573t} = 100\,000$$

$$= \left[\frac{5{,}73e^{0{,}0573 \cdot t}}{0{,}0573}\right]_0^t = \left[100e^{0{,}0573t}\right]_0^t$$

$$= 100e^{0{,}0573t} - 100e^{0} = 100e^{0{,}0573t} - 100$$

$$= 10\,000 + 100 = 100e^{0{,}0573t}$$

$$10100 = 100e^{0{,}0573t}$$

$$101 = e^{0{,}0573t}$$

$$\ln 101 = \ln e^{0{,}0573t}$$

$$0{,}0573t = \frac{\ln 101}{\ln e}$$

$$t \approx 121 \text{ min}$$

Kommentar: Elevlösningen visar insikt om att $\int 5{,}73e^{0{,}0573 \cdot t}\,dt$ ska beräknas, men tar ingen hänsyn till antalet bakterier då $t = 0$. Elevlösningen uppfyller därmed kraven för en begrepps-poäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 A_B och 1 A_{PL})

$5,73\,e^{0,0573t}$

Gör om från $f'(x)$ till $f(x)$

$$f(x) = \frac{5,73\,e^{0,0573t}}{0,0573} + C$$

(100 bakterier från början. $C = 100$)

$$f(x) = 100\,e^{0,0573t} + 100 = 100000$$

$$99900 = 100\,e^{0,0573t}$$

$$\frac{99900}{100} = e^{0,0573t}$$

$$\ln(999) = 0,0573t$$

$$\frac{\ln(999)}{0,0573} = t$$

$$t \approx 120,5 \text{ min}$$

Kommentar: Elevlösningen visar insikt om att antalet bakterier som funktion av tiden ges av $f(x) = \dfrac{5,73\mathrm{e}^{0,0573t}}{0,0573} + C.$ Lösningen tar hänsyn till att antalet bakterier är 100 då $t = 0$ men bestämningen av konstanten är felaktig. Elevlösningen ges därmed en begreppspoäng och en problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 3 (1 A_B, 1 A_{PL} och 1 A_K)

Om $f(t) = 5,73\,e^{0,0573t}$ beskriver hur antalet bakterier förändras per gram så kommer dess primitiva funktion $F(t)$ att beskriva antalet bakterier som finns per gram.

$$F(t) = \frac{5,73e^{0,0573t}}{0,0573} + C$$

Vid tillagning, då $t = 0$, finns det 100 bakterier/g lax
Alltså är $F(0) = 100$.

$$100 = \frac{5,73\,e^{-0,0573\cdot 0}}{0,0573} + C \Rightarrow C = 100 - \frac{5,73e}{0,0573} = 100 - 100e$$

$$C = 100 - 100e \Rightarrow F(t) = \frac{5,73e^{0,0573t}}{0,0573} + 100 - 100e =$$

$$= 100e^{0,0573t} + 100 - 100e$$

Om gränsen är 100000 bakterier så kommer $F(t) = 100000$ när det blir farligt att äta laxen.

$$F(t) = 100000 = 100e^{0,0573t} + 100 - 100e \Rightarrow 1000 = e^{0,0573t} + 1 - e$$

$$999 + e = e^{0,0573t}$$

$$\ln(999 + e) = 0,0573t \Rightarrow t = \frac{\ln(999+e)}{0,0573} \approx 121 \text{ min}$$

Svar: Det tar c:a 121 min innan laxen gör en matförgiftad.

Kommentar: Elevlösningen visar insikt om att antalet bakterier som funktion av tiden ges av $f(x) = \dfrac{5,73e^{0,0573t}}{0,0573} + C.$ Lösningen tar hänsyn till att antalet bakterier är 100 då $t = 0$ men bestämningen av konstanten är felaktig. När det gäller kommunikation är elevlösningen lätt att följa och förstå eftersom funktionsbeteckningar är tydligt definierade, resonemangen kring bestämning av primitiv funktion och konstanten C är utskrivna och symboler används korrekt, med god anpassning till syfte och situation. Sammantaget ges elevlösningen en begrepps-, en problemlösnings- och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 4 (1 A_B och 2 A_{PL})

$y = C \cdot a^t$

t = antal år
$C = 100$ = startmängd
a = förändringsfaktor

$v = \frac{\text{antal bakterier}}{\text{min}}$

$v(t) = N'(t) \rightarrow V(t) = 5{,}73 \cdot e^{0{,}0573t}$ eftersom funktionen har en hastighet bakterier/g/min

primitiv till $v(t) = N(t)$ $\rightarrow N(t) = \frac{5{,}73 \cdot e^{0{,}0573t}}{0{,}0573} + C$

N = antal bakterier

$N(t) = 100 \cdot e^{0{,}0573t} + C$

$e^{0{,}0573} = a$ = förändringsfaktorn

$N(t) = 100 \cdot 1{,}05897^t + C$

$N(0) = 100$ alltså måste $C = 0$

$100\,000 = 100 \cdot 1{,}05897^t$

$1000 = 1{,}05897^t$

$t = 120{,}55 \approx 120$ min

Svar: 120 min tar det innan det finns 100 000 st bakterier/g i laxen.

Kommentar: Elevlösningen visar en metod för att bestämma tiden. När det gäller kommunikation så anses inte elevlösningen vara lätt att följa och förstå. Det beror främst på byte av funktionsbeteckning i inledningen, att *C* används med två olika betydelser och att det inte visas hur slutekvationen löses. Sammantaget ges elevlösningen en begreppspoäng och två problemlösningspoäng på A-nivå.

Uppgift 24a

Elevlösning 1 (1 A_M)

a) $D = 1 \cdot x + 40 \cdot 30 \cdot 0{,}98^x$

Kommentar: Elevlösningen innehåller faktorn $30 \cdot 0,98^x$ och uppfyller därmed kraven för en modelleringspoäng på A-nivå.